**École de technologie supérieure**
Service des enseignements généraux

# ING160

# THERMODYNAMIQUE ET MÉCANIQUE DES FLUIDES

**Notes de cours**

**Adile Benmassaoud**
**André Bordeleau**
**Éric David**

**Avril 2020**

# Remerciements

Je tiens à remercier mes collègues du Service des enseignements généraux de l'École de technologie supérieure de Montréal dont les conseils m'ont été précieux durant cet exercice de récriture des notes de cours que vous avez entre les mains. Je tiens à souligner de façon plus particulière les apports de MM. Alain Hénault et Jean-Sébastien Closson-Duquette ; je leur sais gré pour leurs suggestions et lecture attentive.

Bonne lecture !!

André Bordeleau

# 1ere PARTIE

# LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

# CHAPITRE 1

# LES FLUIDES ET LEURS PROPRIÉTÉS

## Table des matières

**1.1 Définition d'un fluide 3**

**1.2 Propriétés des fluides 4**
1.2.1 Masse volumique 4
1.2.2 Densité 5
1.2.3 Viscosité 5
1.2.4 Module de volume 13
1.2.5 Loi des gaz parfaits 14

**1.3 Pressions absolue et relative 16**

**1.4 Loi de Pascal 16**

**1.5 Variation de pression dans un fluide au repos 18**
1.5.1 Le cas de masse volumique uniforme 19
1.5.2 Le cas de masse volumique variable dans les gaz 20

**1.6 EXERCICES 25**

## 1.1 Définition d'un fluide

La matière se présente sous trois formes : les états solide, liquide et gazeux. Lorsque la matière se présente à l'état liquide ou gazeux, on dit qu'elle constitue un fluide. Afin de se doter d'une définition formelle de la notion de fluide considérons l'expérience imaginaire suivante. Un bloc solide et un bloc fluide sont tous deux extraits de leur milieu respectif (figure 1.1). On applique une contrainte de cisaillement $\tau$ à chacun.

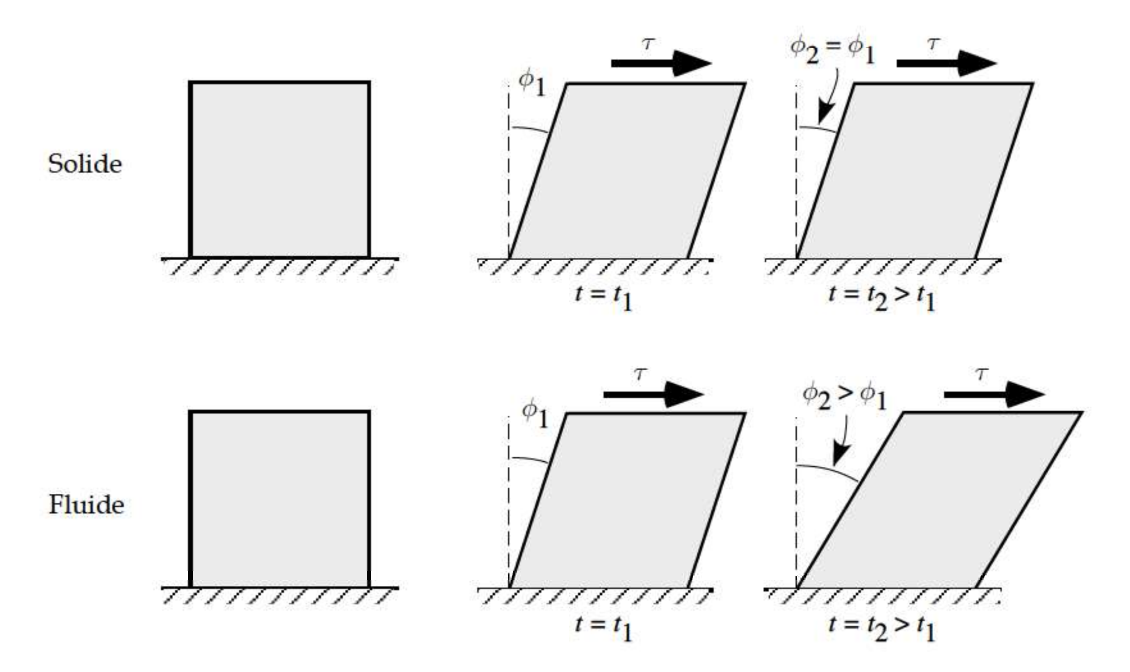



**Figure 1.1** Comportements distincts de blocs solide et fluide

Le solide se déforme, son arête faisant $\phi_1$ par rapport à son orientation initiale. Si la contrainte est maintenue, on observe que la déformation reste la même c'est-à-dire que $\phi_1 = \phi_2$ (dans la mesure où la limite élastique n'est pas dépassée). Si on retire la contrainte, le bloc solide reprend sa forme originelle.

Dans le cas du fluide toutefois, on remarque que si à $t_1$ l'angle de déformation est $\phi_1$, le maintien de la contrainte accentuera la déformation de sorte qu'à $t_2$ l'angle $\phi_2$ sera plus grand que $\phi_1$. On dira que le **fluide s'est écoulé**. C'est cette différence de comportement en présence d'une contrainte de cisaillement qui différencie les fluides des solides.

## 1.2 Propriétés des fluides

### 1.2.1 Masse volumique

La masse volumique d'un fluide, symbolisée par le lettre grecque $\rho$ (rho), est définie comme une masse par unité de volume.

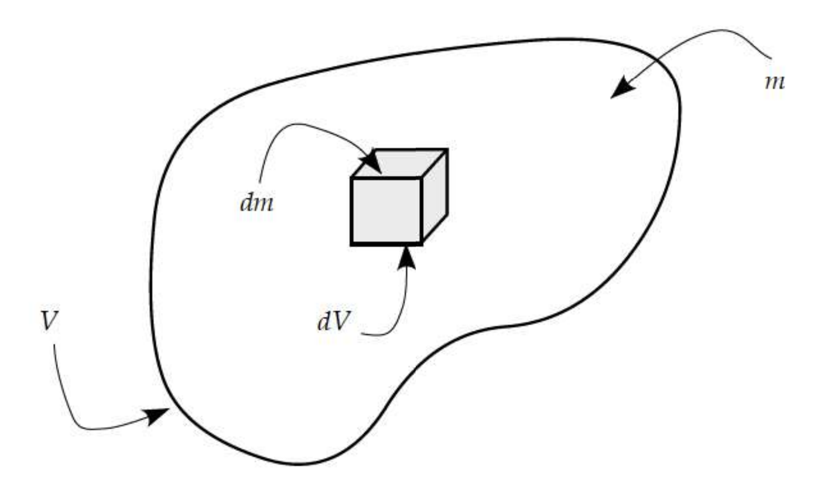



**Figure 1.2** Définition de la masse volumique

Si d'une masse de fluide $m$ on extrait un bloc infinitésimal de volume $dV$ et de masse $dm$, alors la masse volumique est définie par :

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{1-1}$$

La masse totale se calcule alors par :

$$m = \int_V \rho \, dV$$

Toutefois, si la masse volumique est uniforme sur l'ensemble du volume occupé par le fluide on a :

$$m = \rho V \tag{1-2}$$

Dans le système international, S.I., la masse volumique s'exprime en kg/m³. Elle varie en fonction de la nature du fluide et des conditions de température et de pression. À $\mathrm{T} = 4^0\mathrm{C}$ et $\mathrm{P} = 101{,}3\ k\mathrm{P}a$ :

$$\rho_{air} = 1{,}27\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\rho_{eau} = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\rho_{mercure} = 13600\ \mathrm{kg/m^3}$$

La masse volumique d'un fluide peut être affectée de façon appréciable par une modification de pression à laquelle il est assujetti. L'effet est très marqué chez les gaz mais beaucoup moins pour les liquides. Lorsque cette variation de pression n'induit pas de variation de masse volumique (ou que celle-ci est jugée négligeable pour les besoins du calcul), on dit du fluide qu'il est **incompressible.** Les liquides sont donc souvent considérés comme étant incompressibles. Le tableau 1.1 donne, entre autres, la masse volumique de l'eau et de certains liquides usuels en fonction de la température à pression atmosphérique.

### 1.2.2 Densité

La densité $\sigma$ d'un fluide est le rapport entre la masse volumique de celui-ci et celle d'un fluide de référence; c'est un paramètre sans dimension.

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \tag{1-3}$$

Selon que l'on parle de liquide ou de gaz, le fluide référence utilisé diffèrera. En effet, le fluide de référence employé

*i)* pour les liquides est l'eau à 4°C et 101,3 kPa ; $\rho_{ref} = 1000 \ \text{kg/m}^3$.

*ii)* pour les gaz est l'air à 4°C et 101,3 kPa ; $\rho_{ref} = 1,27 \ \text{kg/m}^3$.

**Exemple 1.1** : pour le mercure, un métal liquide,

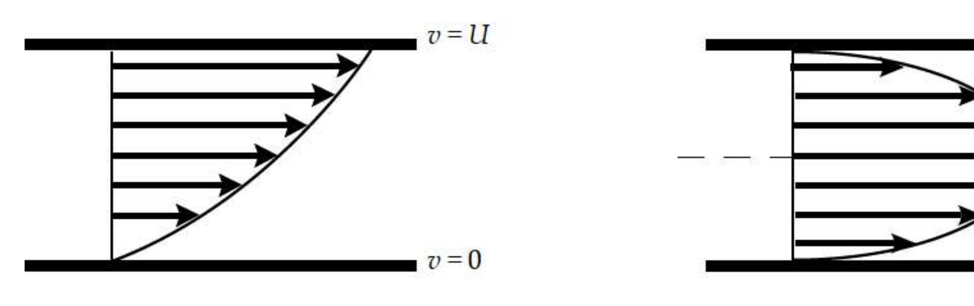
$$\sigma_{Hg} = \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{ref}} = \frac{13600}{1000} = 13,6$$

### 1.2.3 Viscosité

*Description du phénomène*

Tous les fluides ne s'écoulent pas aussi facilement sous l'action d'une contrainte de cisaillement. Certains comme l'eau s'écoulent aisément alors que d'autres comme le goudron ou certaines huiles ne s'écoulent que difficilement. La propriété des fluides qui caractérise cette propension à l'écoulement est la viscosité ($\mu$). Afin de pouvoir la définir correctement on doit d'abord discuter d'une autre notion, celle du profil de vitesse qui s'établit dans un écoulement.

Lorsqu'un fluide est en contact avec une surface solide, la vitesse du fluide à la surface de contact est la même que la vitesse du solide. En d'autres termes, la couche de fluide en contact avec la surface solide ne se déplace pas relativement à celle-ci (condition de non-glissement). On verra alors se développer un « profil de vitesse » à travers le corps du fluide. La figure 1.3 présente deux exemples de cet état de choses.




a) La plaque du bas est immobile mais celle du haut se déplace à $U$ m/s.

b) Écoulement à travers une conduite circulaire.

**Figure 1.3** Profils de vitesse

Quels sont les mécanismes physiques qui sont à l'origine des effets viqueux observés? Considérons d'abord deux couches de liquide adjacentes se déplaçant respectivement à $v$ et $v + \Delta v$ (figure 1.4)

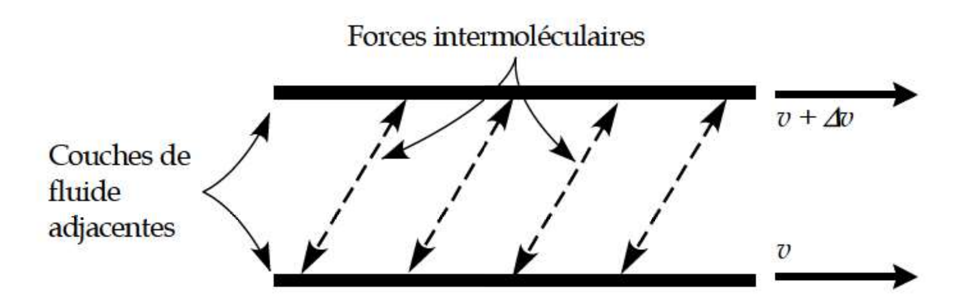



**Figure 1.4** Effet des forces intermoléculaires sur la viscosité

Les forces intermoléculaires attractives agissent de façon à entraîner la couche la plus lente et retenir la couche la plus rapide. C'est le mécanisme qui est responsable des effets de frottement pour les liquides en situation d'écoulement laminaire (ordonné).

Dans les gaz, toutefois, les distances intermoléculaires sont trop grandes pour que les forces d'attraction (de nature électrique) jouent un rôle prépondérant; un autre mécanisme doit être à l'origine des effets visqueux.

La figure 1.5 illustre deux couches de gaz adjacentes en écoulement. Bien que le déplacement global s'effectue de gauche à droite, il y a toujours un transfert de masse entre les couches qui s'opère à l'échelle moléculaire (microscopique). Ce transfert de masse s'accompagne d'un transfert de quantité de mouvement qui aura pour effet d'accélérer la couche la plus lente et de ralentir la couche la plus rapide. (Pensez au résultat du lancer de sacs de sable d'un chariot rapide vers un chariot lent et vice-versa). C'est le mécanisme qui est principalement responsable du frottement visqueux chez les gaz.

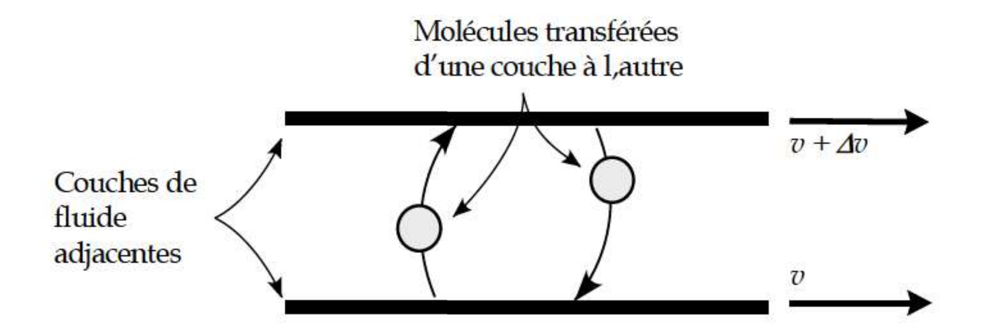



**Figure 1.5** Frottement visqueux dans les gaz

Si l'échange de matière entre les couches se fait à l'échelle macroscopique, l'effet de frottement en est d'autant augmenté. C'est ce mécanisme que nous invoquerons au chapitre 6 pour caractériser les effets visqueux dans les cas d'écoulements turbulents (désordonnés).

*Loi de Newton*

Soit un milieu fluide présentant un certain profil de vitesse $v(y)$ (figure 1-6).

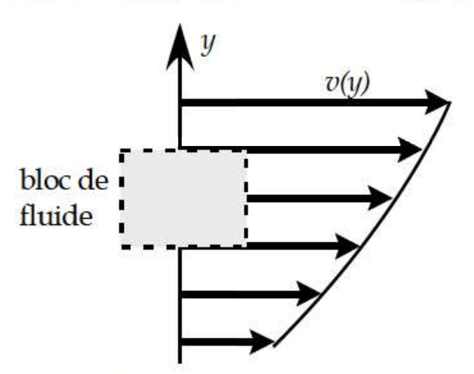



**Figure 1.6** Portion d'un fluide en écoulement

Examinons le comportement d'un bloc de fluide entre les instants $t_0$ et $t_0+dt$. La figure 1.7 illustre la situation.

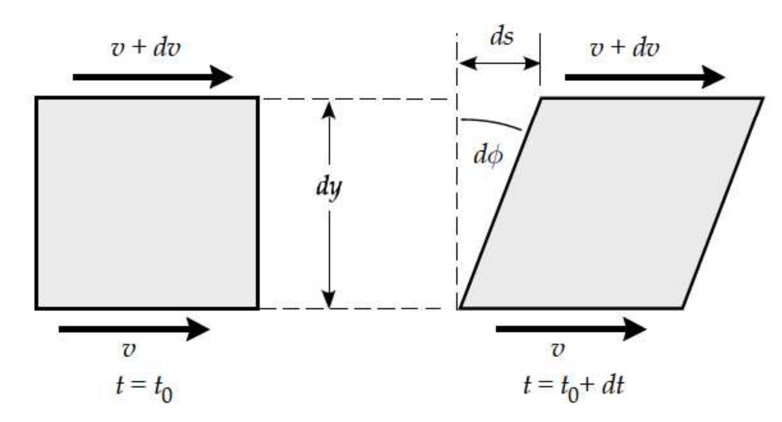



**Figure 1.7** Déformation d'un élément de fluide durant l'intervalle de temps $dt$

La couche supérieure du bloc se déplace plus rapidement que la couche inférieure et cause la déformantion du bloc. L'arête de gauche du bloc effectue donc une rotation de $d\phi$ alors que le coin supérieur gauche se déplace de $ds$. On veut établir le taux de variation de $d\phi$.

$$ds = [(v+dv)-v]\ dt$$

Or :

$$\tan(d\phi) = \frac{ds}{dy}$$

Comme l'angle est très petit,

$$\tan(d\phi) \simeq d\phi = \frac{ds}{dy} = \frac{dv}{dy}dt$$

Donc :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{dv}{dy}$$

La plupart des fluides communs, l'air et l'eau en sont des exemples, présentent la caractéristique que la contrainte de cisaillement $\tau$ est proportionnelle au taux de déformation $\frac{d\phi}{dt}$. Ce sont les « fluides newtoniens ». Alors :

$$\tau \propto \frac{d\phi}{dt} = \frac{dv}{dy}$$

Ainsi :

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \qquad (1\text{-}4)$$

où $\mu$ est la viscosité absolue (ou dynamique). Dans le Système international d'unités (SI), la viscosité dynamique s'esprime en Pa.s.

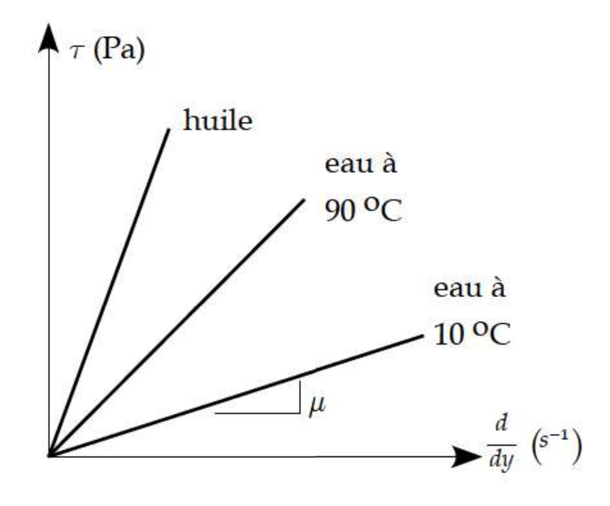
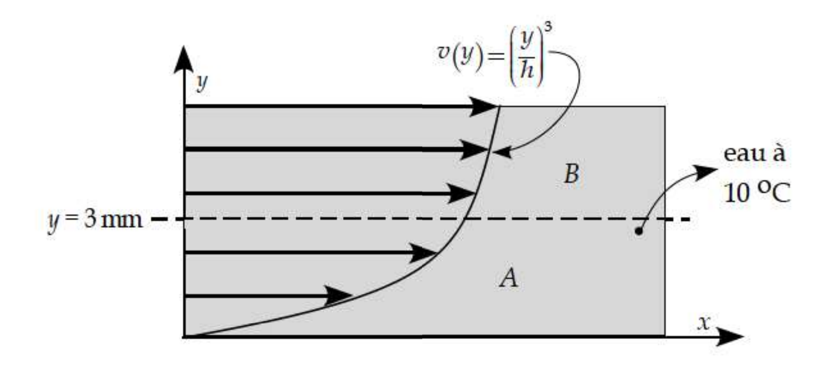


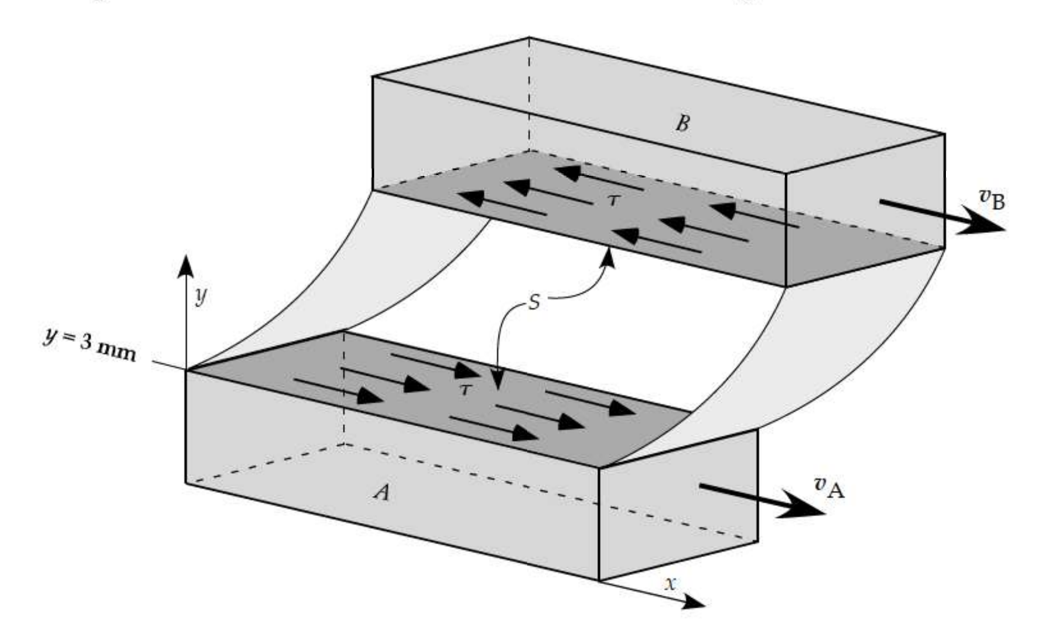

**Figure 1.8** Contraintes de cisaillement en fonction du taux de déformation pour des fluides newtoniens

**Exemple 1.2**




De l'eau à 10 °C en écoulement présente le profil de vitesse présenté à la figure ci-dessus (où $h$ = 7 mm). Quelle est la force exercée par la portion inférieure du fluide (région $A$) sur la portion supérieure (région $B$) en $y$ = 3 mm si la surface de contact entre les blocs $S$ est de 0.5 m²?

*Solution* : Du fait du profil de vitesse spécifié, on observe que la couche de fluide juste au-dessus de $y$ = 3 mm (région $B$) se déplace plus rapidement que la couche juste en-dessous (région $A$). Si on procède à une séparation imaginaire des deux blocs, on aurait quelque chose qui présente l'allure de la figure ci-dessous où sont montrées les contraintes agissant sur chacun des blocs.




Désignons par $\mathbf{F}_{A\to B}$ la force exercée par le bloc $A$ sur le bloc $B$. On observe que cette force est orientée en direction de $x$ négatif (la matière en-dessous cherche à retenir le bloc $B$).

$$\mathbf{F}_{A\to B} = -F_{A\to B}\mathbf{i}$$

où

$$F_{A\to B} = \tau S$$

et

$$\tau(y = 3\text{mm}) = \mu \left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=3\text{mm}}.$$

Ainsi

$$\tau(y) = \mu\frac{dv}{dy} = 3\mu\frac{y^2}{h^3}$$

$$\tau(y = 3\text{ mm}) = 3 * 1,31 \times 10^{-2} * \left(\frac{0,003^2}{0,007^3}\right) = 1,0312\text{ Pa}.$$

Alors : $F_{A \to B} = \tau S = 1,0312 * 0.5 = 0,5156\text{ N}$

finalement, $\mathbf{F}_{A \to B} = -0,5156\mathbf{i}\text{ N}.$

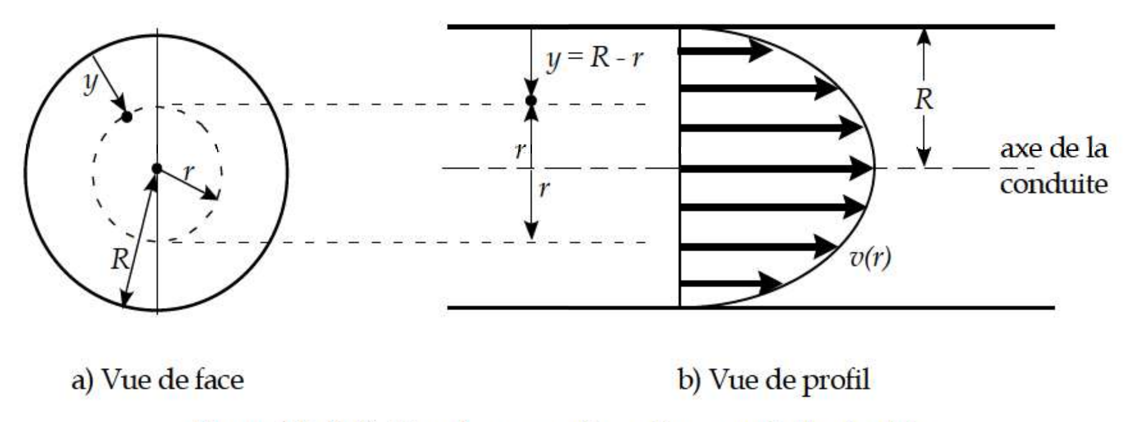
La troisième loi de Newton stipule que la force ressentie par *A* du fait de l'action de *B* sera l'inverse de ce résultat, c'est-à-dire :

$$\mathbf{F}_{B \to A} = -\mathbf{F}_{A \to B} = +0,5156\mathbf{i}\text{ N}$$

Notons que le sens de la contrainte (et donc, de la force) est établi par inspection du profil de vitesse.

*Cas d'un écoulement à travers une conduite à section circulaire*

Du fait de la symétrie axiale inhérente à la géométrie, la vitesse ne peut dépendre que de la distance par rapport au centre, c'est-à-dire $v = v(r)$. Se référant à la figure 1.9,




a) Vue de face b) Vue de profil

**Figure 1.9** Définition des paramètres d'une conduite circulaire

$$y = R - r \Rightarrow dy = -dr.$$

Alors : $$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} \tag{1-5}$$

*Viscosité cinématique*

En mécanique des fluides on utilise aussi **la viscosité cinématique** symbolisée par la lettre $\nu$ (nu), et définie par la relation suivante :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{1-6}$$

Dans le S.I., la viscosité cinématique s'exprime en $m^2/s$. Les tableaux 1.1 et 1.2 présentent certaines des propriétés des liquides et gaz usuels.

| Liquide | Température T (°C) | Masse volumique $\rho\left(kg/m^3\right)$ | Densité $\sigma$ | Viscosité absolue $\mu$ Pa.s | Viscosité cinématique $\nu$ ($m^2/s$) |
|---|---|---|---|---|---|
| eau | 0 | 1000 | 1,000 | 1,79 E - 3 | 1,79 E - 6 |
| | 10 | 1000 | 1,000 | 1,31 E - 3 | 1,31 E - 6 |
| | 20 | 998 | 0,998 | 1,00 E - 3 | 1,00 E - 6 |
| | 30 | 996 | 0,996 | 7,98 E - 4 | 8,01 E - 7 |
| | 40 | 992 | 0,992 | 6,53 E - 4 | 6,58 E - 7 |
| | 50 | 988 | 0,988 | 5,47 E - 4 | 5,48 E - 7 |
| | 60 | 983 | 0,983 | 4,67 E - 4 | 4,75 E - 7 |
| | 70 | 978 | 0,978 | 4,04 E - 4 | 4,13 E - 7 |
| | 80 | 972 | 0,972 | 3,55 E - 4 | 3,65 E - 7 |
| | 90 | 965 | 0,965 | 3,15 E - 4 | 3,26 E - 7 |
| | 100 | 958 | 0,958 | 2,82 E - 4 | 2,94 E - 7 |
| Mercure | 0 | 13600 | 13,60 | 1,68 E - 3 | 1,24 E - 7 |
| | 4 | 13590 | 13,50 | -- | -- |
| | 20 | 13550 | 13,55 | 1,55 E - 3 | 1,14 E - 7 |
| | 40 | 13500 | 13,50 | 1,45 E - 3 | 1,07 E - 7 |
| | 60 | 13450 | 13,45 | 1,37 E - 3 | 1,02 E - 7 |
| | 80 | 13400 | 13,40 | 1,30 E - 3 | 9,70 E - 8 |
| | 100 | 13350 | 13,35 | 1,24 E - 3 | 9,29 E - 8 |
| Éthylène glycol | 0 | -- | -- | 5,70 E - 2 | -- |
| | 20 | 1110 | 1,11 | 1,99 E - 2 | 1,79 E - 5 |
| | 40 | 1110 | 1,10 | 9,13 E - 3 | 8,30 E - 6 |
| | 60 | 1090 | 1,09 | 4,95 E - 3 | 4,54 E - 6 |
| | 80 | 1070 | 1,07 | 3,02 E - 3 | 2,82 E - 6 |
| | 100 | 1060 | 1,06 | 1,99 E - 3 | 1,88 E - 6 |
| Alcool méthylique (méthanol) | 0 | 810 | 0,810 | 8,17 E - 4 | 1,01 E - 6 |
| | 10 | 801 | 0,801 | -- | -- |
| | 20 | 792 | 0,792 | 5,84 E - 4 | 7,37 E -7 |
| | 30 | 783 | 0,783 | 5,10 E - 4 | 6,51 E - 7 |
| | 40 | 774 | 0,774 | 4,50 E - 4 | 5,81 E - 7 |
| | 50 | 765 | 0,765 | 3,96 E - 4 | 5,18 E - 7 |

**Tableau 1.1** Propriétés physiques de l'eau et de liquides usuels

## Tableau 1.1 (suite)

| Liquide | Température T (°C) | Masse volumique $\rho\left(kg/m^3\right)$ | Densité $\sigma$ | Viscosité absolue $\mu$ (Pa.s) | Viscosité cinématique $\nu$ ($m^2/s$) |
|---|---|---|---|---|---|
| Alcool Éthylique | 0 | 806 | 0,806 | 1,77 E - 3 | 2,20 E - 6 |
| (éthanol) | 20 | 789 | 0,789 | 1,20 E - 3 | 1,52 E - 6 |
| | 40 | 772 | 0,772 | 8,34 E - 4 | 1,08 E - 6 |
| | 60 | 754 | 0,754 | 5,92 E - 4 | 7,85 E - 7 |
| Octane normal | 0 | 718 | 0,718 | 7,06 E - 4 | 9,83 E - 7 |
| | 16 | -- | -- | 5,74 E - 4 | -- |
| | 20 | 702 | 0,702 | 5,42 E - 4 | 7,72 E - 7 |
| | 25 | -- | -- | -- | -- |
| | 40 | 686 | 0,686 | 4,33 E - 4 | 6,31 E - 7 |
| Benzène | 0 | 900 | 0,900 | 9,12 E - 4 | 1,01 E - 6 |
| | 20 | 879 | 0,879 | 6,52 E - 4 | 7,42 E - 7 |
| | 40 | 858 | 0,857 | 5,03 E - 4 | 5,86 E - 7 |
| | 60 | 836 | 0,836 | 3,92 E - 4 | 4,69 E - 7 |
| | 80 | 815 | 0,815 | 3,29 E - 4 | 4,04 E - 7 |
| Kérozène | -18 | 841 | 0,841 | 7,06 E - 3 | 8,40 E - 6 |
| | 20 | 814 | 0,814 | 1,90 E - 3 | 2,37 E - 6 |
| Huile lubrifiante | 20 | 871 | 0,871 | 1,31 E - 2 | 1,50 E - 5 |
| | 40 | 858 | 0,858 | 6,81 E - 3 | 7,94 E - 6 |
| | 60 | 845 | 0,845 | 4,18 E - 3 | 4,95 E - 6 |
| | 80 | 832 | 0,832 | 2,83 E - 3 | 3,40 E - 6 |
| | 100 | 820 | 0,820 | 2,00 E - 3 | 2,44 E - 6 |
| | 120 | 809 | 0,809 | 1,54 E - 3 | 1,90 E - 6 |

| Gaz | $M\left(g/mol\right)$ | $\rho\left(kg/m^3\right)$ | $\mu\left(x10^{-6}\ Pa.s\right)$ |
|---|---|---|---|
| Air | 29,0 | 1,293 | 17,05 |
| Monoxyde de carbone | 28,0 | 1,250 | 16,6 |
| Dioxyde de carbone | 44,0 | 1,997 | 14,0 |
| Hélium | 4,00 | 0,179 | 18,6 |
| Hydrogène | 2,02 | 0,090 | 8,35 |
| Méthane | 16,0 | 0,717 | 10,3 |
| Azote | 28.,0 | 1,250 | 16,7 |
| Oxygène | 32,0 | 1,429 | 19,2 |
| Vapeur d'eau | 18,0 | 0,800 | 8,7 |

**Tableau 1.2** Propriétés de certains gaz usuels à P = 1 atm et T = 273 K

### 1.2.4 Module de volume

La compressibilité des fluides, est caractérisée par le module de volume, *K*, défini comme suit :

$$K = -V\frac{dP}{dV} = -\frac{dP}{(dV\,/\,V)} \tag{1-7}$$

Afin de simplifier l'analyse réécrivons l'équation (1-7) en termes de variations finies (plutôt qu'infinitésimales) :

$$\Delta P = -K\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$$

On voit qu'on peut considérer le module de volume *K* comme une mesure de la « rigidité » du fluide. En effet, sa grandeur détermine la variation de pression nécessaire ($\Delta P$) à une variation relative de volume $(\Delta V/V)$. Plus la valeur de *K* est élevée, moins le fluide se comprime aisément. Dans le S.I., le module de volume *K* s'exprime en Pa. On peut récrire 1-14 sous une autre forme. Se souvenant que :

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$dV = -m\frac{d\rho}{\rho^2} \qquad \text{(on présume que } m = cte\text{)}$$

Alors l'équation(1-7)devient

$$K = \rho\frac{dP}{d\rho} \tag{1-8}$$

Ce dernier résultat permet de prédire la masse volumique suite à une variation de pression à laquelle le fluide est soumis.

Du fait de l'équation (1-8) on a :

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = \int_{\rho_1}^{\rho_2} K\frac{d\rho}{\rho}$$

$$P_2 - P_1 = K\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \qquad \text{(on présume } K \text{ constant)}$$

$$\rho_2 = \rho_1 e^{(P_2-P_1)/K} \tag{1-9}$$

**Exemple 1.3** : Quelles sont les masses volumiques de l'air et de l'eau à 200 kPa si, à 100 kPa, elles sont respectivement de 1,2 kg/m³ et 1000 kg/m³ ; $K_{air}$ =100 kPa ; $K_{H_2O} = 2,2\ \text{GPa}$.

Puisque : $$\rho_2 = \rho_1 e^{(P_2 - P_1)/K}$$

Alors, pour l'air $$\rho_2 = 1,2 e^{10^5/10^5} = 3,26\ \text{kg/m}^3$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}\% = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} * 100\% = 172\%$$

et pour l'eau $$\rho_2 = 1000 e^{10^5/2,2x10^9} = 1000,045\ \text{kg/m}^3$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}\% = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} * 100\% = 4,5\times10^{-3}\ \%$$

On comprends ainsi pourquoi un liquide tel que l'eau est normalement considéré comme incompressible, contrairement aux gaz.

### 1.2.5 Loi des gaz parfaits

Le comportement des gaz est dit parfait ou idéal lorsque les interactions entre les particules peuvent être négligées (par exemple en situation de faible densité ou de température élevée). Sous cette hypothèse la relation entre les paramètres fondamentaux est traduit par la loi des gaz parfaits dont l'expression est souvent :

$$PV = n\bar{R}T \tag{1-10}$$

où $P$ est la pression absolue du gaz en Pa, $V$, le volume occupé par le gaz en m³, $n$, le nombre de moles du gaz dans le volume $V$, $T$, la température absolue en Kelvin et $\bar{R}$ , la constante <u>universelle</u> des gaz parfaits dont la valeur numérique est 8.314 J/(mole*K). En ingénierie, on préfère que la quantité de matière soit spécifiée par la masse plutôt que le nombre de moles. Se rappelant que :

$$n = \frac{m}{M}$$ $M$ : masse molaire du gaz

On définit : $$R = \frac{m}{M}\bar{R}$$ ***R*** : constante du gaz

L'équation (1-10) devient alors :

$$PV = mRT \tag{1-11}$$

Ou $$P = \rho RT \tag{1-12}$$

Notons que la valeur de *R* est désormais particulière à chaque gaz; ses valeurs sont tabulées au tableau 1.3 pour quelques gaz usuels.

| Gaz | Formule chimique | M (g/mol) | *R* (J/kg*K) |
|---|---|---|---|
| Air | -- | 28,97 | 287,00 |
| Argon | Ar | 39,948 | 208,13 |
| Azote | $N_2$ | 28,013 | 296,80 |
| Butane | $C_4H_{10}$ | 58,124 | 143,04 |
| Dioxyde de carbone | $CO_2$ | 44,01 | 188,92 |
| Éthane | $C_2H_6$ | 30,07 | 276,50 |
| Éthylène | $C_2H_4$ | 28,054 | 296,37 |
| Hélium | He | 4,003 | 2077,03 |
| Hydrogène | $H_2$ | 2,016 | 4124,18 |
| Méthane | $CH_4$ | 16,04 | 518,35 |
| Monoxyde de carbone | CO | 28,01 | 296,83 |
| Néon | Ne | 20,183 | 411,95 |
| Octane | $C_8H_{18}$ | 114,23 | 72,79 |
| Oxygène | $O_2$ | 31,999 | 259,83 |
| Propane | $C_3H_8$ | 44,097 | 188,55 |
| Vapeur d'eau | $H_2O$ | 18,015 | 461,52 |

**Tableau 1.3** Propriétés de différents gaz parfaits

**Exemple 1.4 :** Calculez la masse volumique de l'air dans un pneu où la température est de 21°C et la pression est de 250 kPa et celle dans le milieu ambiant si la pression à l'extérieur est de 101,3 kPa . D'après le tableau 1.3, *R* = 287 J/kgK.

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

$$\rho_{pneu} = \frac{250\times 10^3}{287\times(21+273,15)} = 2,96\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\rho_{atm} = \frac{101,3\times 10^3}{287\times 294,15} = 1,20\ \mathrm{kg/m^3}$$

## 1.3 Pressions absolue et relative

La pression est le rapport entre la composante normale de la force appliquée sur une surface donnée et l'aire de cette surface.

Ainsi : $$P = \frac{dF_\perp}{dA}$$

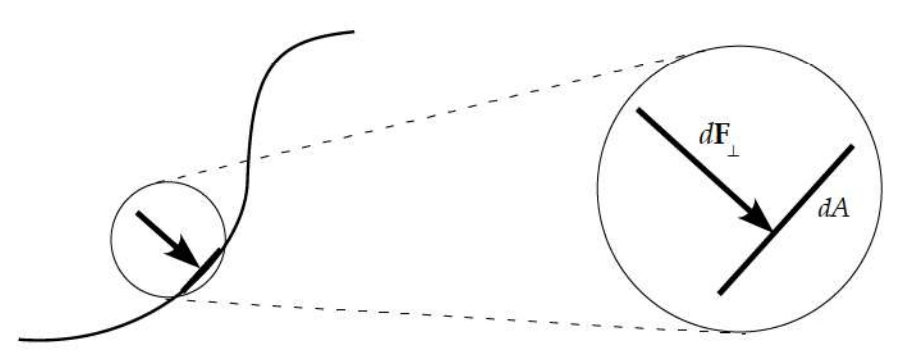



**Figure 1.10** Définition de la pression

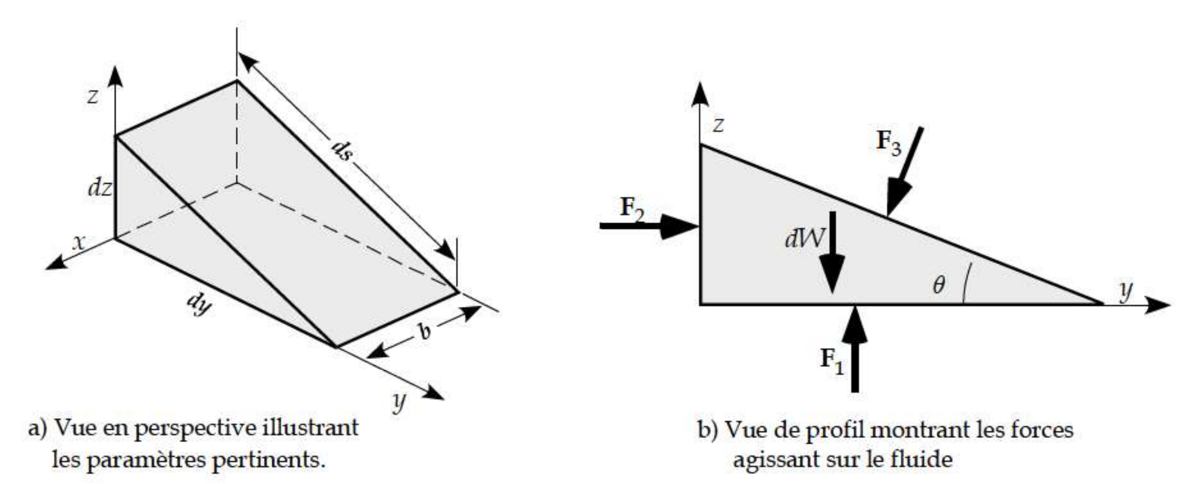
Dans le S.I., la pression s'exprime en Pa (1 Pa = 1 N/m$^2$). La pression absolue est la pression mesurée par rapport au vide absolu. La pression atmosphérique en constitue un exemple. La pression relative (ou « gauge pressure ») mesure l'écart de la pression (absolue) avec une valeur de référence. Typiquement on prend la pression atmosphérique dans le voisinage immédiat comme pression de référence.

$$P_{rel} = P_{abs} - P_{atm} \tag{1-13}$$

*À moins que le contexte ne l'exige, nous n'utiliserons pas de symbole particulier pour désigner la pression relative.*

## 1.4 Loi de Pascal

Considérons un prisme de dimensions infinitésimales extrait d'une région de fluide au repos (pas d'écoulement). Comme le fluide est au repos, il n'y a pas de forces de cisaillement ; seules les forces dûes à la pression et le poids agissent.




a) Vue en perspective illustrant les paramètres pertinents.

b) Vue de profil montrant les forces agissant sur le fluide

**Figure 1.11** Diagramme des forces agissant sur un prisme de fluide au repos

Le fluide est en équilibre, alors :

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

$$\sum F_y = F_2 - F_3 \sin\theta = P_2 b dz - P_3 b ds \sin\theta = 0$$

Or $$ds \sin\theta = dz$$

$$\sum F_y = (P_2 - P_3) b dz = 0$$

Alors : $$P_2 = P_3$$

Par ailleurs, $$\sum F_z = F_1 - F_3 \cos\theta - dW = 0$$

$$dW = gdm = \rho g dV = \rho g b \frac{dydz}{2}$$

$$\sum F_z = P_1 b dy - P_3 b \cos\theta ds - \rho g b \frac{dydz}{2} = 0$$

Or $$ds \cos\theta = dy$$

$$\sum F_z = (P_1 - P_3 - \frac{\rho g dz}{2}) b dy = 0$$

En faisant tendre les dimensions vers 0 on a, en particulier :

$$\frac{\rho g dz}{2} \to 0$$

donc : $$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_3$$

De sorte que : $$P_1 = P_2 = P_3$$

Ce résultat indique que quelque soit l'orientation de la surface utilisée pour mesurer la pression en un point, on trouvera toujours le même nombre. La pression n'a donc pas à être considérée comme une grandeur vectorielle.

## 1.5 Variation de pression dans un fluide au repos

Il est notoire que la pression varie selon l'altitude dans un fluide au repos du fait des effets gravitationnels; tachons de quantifier cette relation. Considérons un élément cylindrique infinitésimal à l'intérieur d'un fluide au repos, tel qu'illustré ci-dessous (nous choisissons de ne représenter que les forces agissant selon la verticale).

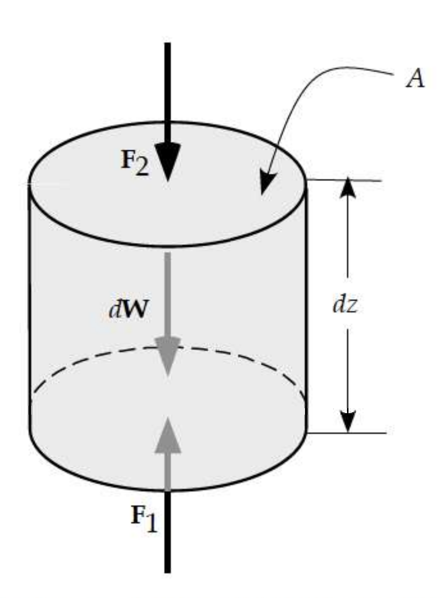



**Figure 1.12** Diagramme des forces selon la verticale pour un élément de fluide cylindrique

L'équilibre des forces selon $z$ s'écrit :

$$\sum F_z = F_1 - F_2 - dW = 0$$

Or : $$F_1 = PA; \quad F_2 = (P + dP)A; \quad dW = \rho g A dz$$

$$\sum F_z = PA - (P + dP)A - \rho g A dz = 0$$

Donc : $$\frac{dP}{dz} = -\rho g \qquad (1\text{-}14)$$

Le signe négatif implique que la pression diminue avec l'élévation (ou altitude) et vice-versa. L'équation (1-14) s'écrit aussi :

$$dP = -\rho g dz \qquad (1\text{-}15)$$

De sorte qu'en intégrant de part et d'autre on trouve :

$$P_2 - P_1 = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g dz \qquad (1\text{-}16)$$

En fait, il est rare que l'on doive tenir compte la variation de $g$ étant donné la différence d'élévation considérée. En ce cas, l'équation (1-16) prend plutôt la forme:

$$P_2 - P_1 = -g\int_{z_1}^{z_2} \rho(z) dz \qquad (1\text{-}17)$$

### 1.5.1 Le cas de masse volumique uniforme

Si la masse volumique peut être considérée uniforme (donc constante en fonction de $z$), l'équation (1-17) donne le résultat bien connu:

$$P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1) \qquad (1\text{-}18)$$

Pour les gaz, le résultat (1-18) peut souvent s'appliquer dans la mesure où la différence d'élévation $(z_2 - z_1)$ n'est pas trop grande et que la température ne varie pas trop dans cette région. Pour les liquides, puisqu'ils sont souvent considérés incompressibles, le résultat s'applique presque toujours. Ce sera le cas dans le cadre de ce texte.

**Exemple 1.4** Un plongeur descend à la profondeur de 30 m dans de l'eau de mer. Calculez la pression ressentie par le plongeur si la pression atmosphérique est de 100 kPa si $\rho$ = 1025 kg/m³.

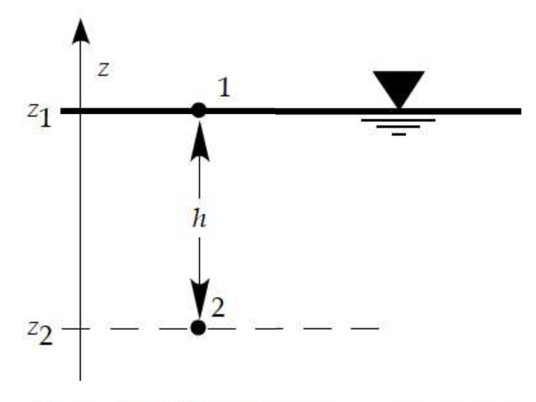



**Figure 1.13** Plongeur à une profondeur $h$

L'eau de mer est incompressible donc :

$$P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$
$$P_1 = P_{atm} \text{ et } z_2 - z_1 = -h$$
$$P_2 - P_{atm} = +\rho g h$$

$$\mathrm{P}_2 = \left(100 * 10^3 + 1025 * 9{,}81 * 30\right) \text{ Pa} = 401{,}7 \text{ kPa}$$

### 1.5.2 Le cas de masse volumique variable dans les gaz

Utilisons la loi des gaz parfaits (1-12) pour décrire la relation entre la pression, la température et la masse volumique :

$$P = \rho R T$$

Par ailleurs, la variation de la pression en fonction de l'altitude est donnée par l'équation(1-15). En combinant les équations (1-12) et (1-15), il vient :

$$dP = -\frac{P}{RT} g dz$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{RT} dz \qquad (1\text{-}19)$$

La solution pour $P$ de l'équation (1-19) dépend de la dépendance de la température en fonction de l'altitude, $z$. Nous considérerons deux cas :

*i)* la température ne varie pas en fonction de l'altitude;

*ii)* la température varie de façon linéaire en fonction de $z$.

*i)* Si la température est constante dans la région considérée (c'est-à-dire sur la différence d'élévation ($z_2$ – $z_1$), on peut intégrer chaque membre de l'équation (1-19) pour trouver :

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = \int_{z_1}^{z_2} -\frac{g}{RT} dz = \frac{-g}{RT} \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -\frac{g}{RT}(z_2 - z_1)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = e^{-\frac{g}{RT}(z_2 - z_1)} \qquad (1\text{-}20)$$

*ii)* Il arrive que la température croisse (ou décroisse) de façon linéaire en fonction de l'élévation :

$$T = T_0 + bz \tag{1-21}$$

Ce comportement s'observe à diverses altitudes. C'est en particulier le cas dans la troposhère (faible altitude) dans le cas duquel :

$$T_0 = 288{,}15 \text{ K} \text{ et } b = -6{,}5 \times 10^{-3} \text{ K/m}$$

Insérant (1-21) dans (1-19) et intégrant de part et d'autre, il vient :

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{-g}{R(T_0 + bz)} dz = \frac{-g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T_0 + bz}.$$

Et en conséquence :

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \left(\frac{T_0 + bz_2}{T_0 + bz_1}\right)^{-\frac{g}{Rb}} \tag{1-22}$$

La figure 1.14 illustre comment varie la température dans une portion de l'atmosphère.

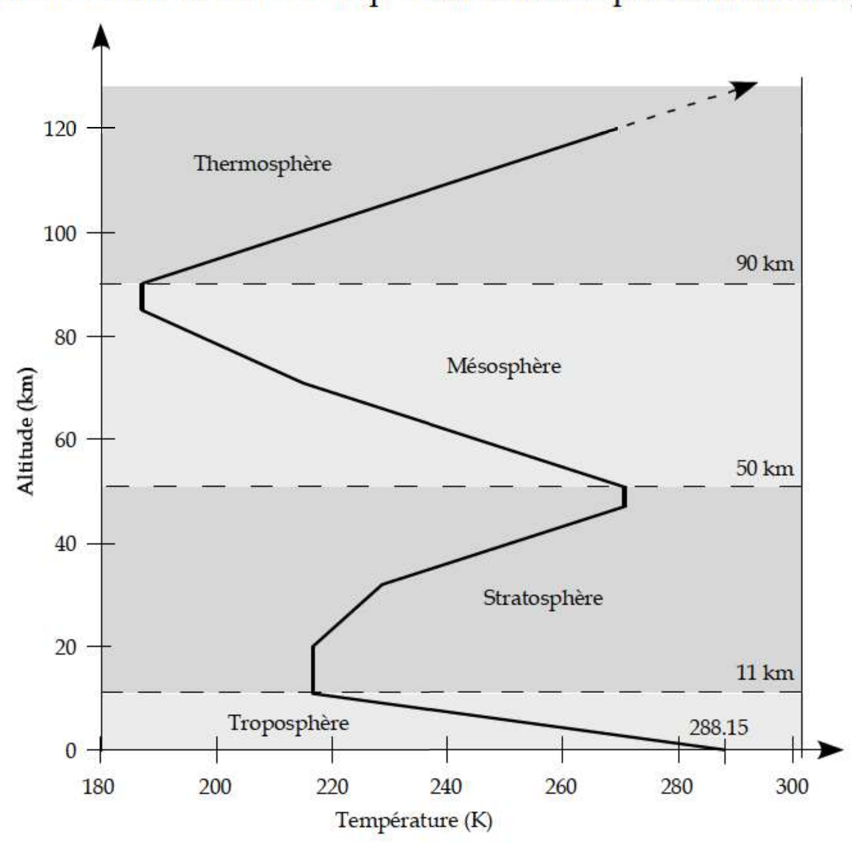



**Figure 1.14** Variation de la température en fonction de l'altitude en atmosphère standard

**Exemple 1.5 :** Comme le montre la figure qui précède, la température varie de façon linéaire jusqu'à l'altitude de 11 km et se maintient constante au-delà, jusqu'à 20 km. Établissez la pression à l'altitude de 20 km sachant que la pression au niveau du sol est de 101.3 kPa et que :

$$T(z) = T_0 + bz$$

avec : $T_0 = 288{,}15 \text{ K}$ et $b = -0{,}006{,}5 \text{ K/m}$ pour $0 \leq z \leq 11 \text{ km}$

*Solution*

Puisque la température a une dépendence différente de 0 à 11 km d'altitude et de 11 à 20 km, on devra procéder en deux temps.

*i)* $0 \leq z \leq 11 \text{ km}$ ; L'équation (1-22) permet de connaître la pression à l'altitude de 11 km.

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \left(\frac{T_0 + bz_2}{T_0 + bz_1}\right)^{-\frac{g}{Rb}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-\frac{g}{Rb}}$$

Ici, $T_1 = T_0 = 288{,}15 \text{ K}$ et $T_2 = (288{,}15 - 0{,}0065 * 11000) = 216{,}65 \text{ K}$

alors que $\dfrac{g}{Rb} = \dfrac{9.81}{287 * (-0{,}0065)} = -5{,}259$

Donc : $P_2 = P_1 \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^{-\frac{g}{Rb}} = 101{,}3 * \left(\dfrac{216{,}65}{288{,}15}\right)^{5{,}259} = 22{,}606 \text{ kPa} = P(z = 11 \text{ km})$

*ii)* $11 \leq z \leq 20 \text{ km}$ ; La pression à l'altitude de 20 km s'obtient à l'aide de l'équation (1-20).

$$\frac{P_2}{P_1} = e^{-\frac{g}{RT}(z_2 - z_1)}$$

où : $P_1 = P(z = 11 \text{ km}) = 22{,}606 \text{ kPa}$ et $T = T(z = 11 \text{ km}) = 216{,}65 \text{ K}$.

$$\frac{g}{RT}(z_2 - z_1) = \frac{9.81}{287 * 216{,}65} * (20000 - 11000) = 1{,}4199$$

ainsi : $P_2 = P_1 e^{-\frac{g}{RT}(z_2 - z_1)} = 22{,}606 * e^{-1{,}4199} = 5{,}465 \text{ kPa}$.

Donc : $P(z = 20 \text{ km}) = 5{,}465 \text{ kPa}$

| Altitude (m) | Pression absolue (x $10^5$ Pa) | Température (K) | Masse volumique (kg/$m^3$) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,01325 | 288,15 | 1,2250 |
| 1000 | 0,8988 | 281,7 | 1,1117 |
| 2000 | 0,7950 | 275,2 | 1,0066 |
| 4000 | 0,6166 | 262,2 | 0,8194 |
| 6000 | 0,4722 | 249,2 | 0,6602 |
| 8000 | 0,3565 | 236,2 | 0,5258 |
| 10000 | 0,2650 | 223,3 | 0,4136 |
| 11500 | 0,2098 | 216,7 | 0,3375 |
| 12000 | 0,1940 | 216,7 | 0,3119 |
| 14000 | 0,1417 | 216,7 | 0,2279 |
| 16000 | 0,1035 | 216,7 | 0,1665 |
| 18000 | 0,07565 | 216,7 | 0,1216 |
| 20000 | 0,05529 | 216,7 | 0,0889 |
| 22000 | 0,04047 | 218,6 | 0,06451 |
| 24000 | 0,02972 | 220,6 | 0,04694 |
| 26000 | 0,02188 | 222,5 | 0,03426 |
| 28000 | 0,01616 | 224,5 | 0,02508 |
| 30000 | 0,01197 | 226,5 | 0,01841 |
| 32000 | 0,00889 | 228,5 | 0,01356 |

**Tableau 1.4** Paramètres de l'atmosphère standard.

## 1.6 EXERCICES

**Problème 1** Quelle est la densité de l'hydrogène à 20 °C et 101,3 kPa si l'air est pris comme référence à 4 °C et 101,3 kPa. Quelles sont les masses volumiques des deux gaz à ces conditions.

Rép. : $\sigma_{H2}$ = 0,066; $\rho_{air}$ = 1,27 kg/m³ ; $\rho_{H2}$ = 0,0838 kg/m³

**Problème 2** Un chimiste veut préparer du vin à une densité de 1,05 en utilisant du vin ayant une densité de 1,12. Quelle est la proportion $\alpha$ du volume d'eau ajouté par rapport au volume final.

Rép. : $\alpha$ = 0,58

**Problème 3** Un bloc est tiré à la vitesse constante de 0.5 m/s à la surface d'un film d'huile ($\mu$ = 0,38 Pa.s) de 3 mm d'épaisseur (figure P 1.3). La surface de contact entre le bloc et l'huile est 0,3 m². Le profil de vitesse de l'huile est donné par la fonction $v(y) = 0.5\left(e^{ay/h} - 1\right)$ m/s.

a) Calculez le paramètre $a$.

b) Calculez la force $F$ nécessaire au maintien du mouvement du bloc.

Rép : a) $a$ = 0,693. b) $F$ = 26,33 N

**Problème 4** De l'eau à 25 °C est en écoulement à travers une conduite circulaire (figure P 1.4). Si l'écoulement présente un profil de vitesse donné par : $v(r) = 10\left(1 - (100r)^2\right)$ m/s,

a) dites ce que vaut le rayon de la conduite;

b) calculez la contrainte de cisaillement à la paroi;

c) calculez la contrainte de cisaillement à mi-chemin entre le centre de la conduite et la paroi;

d) établissez la force exercée par l'écoulement sur 30 cm de conduite.

Rép : a) $R$ = 1 cm; b) $\tau$ = 1,798 Pa; c) $\tau$ = 0,899 Pa; d) $F$ = 0,03389 N

**Problème 5** Un viscosimètre est constitué de deux tubes concentriques entre lesquels est disposé le fluide à étudier (figure P 1.5). Un couple de 0,174 Nm est nécessaire pour faire tourner le cylindre interne à la vitesse de 400 tpm (tour par minute). On suppose que le profil de vitesse dans le fluide est linéaire. Calculez la viscosité dynamique du fluide.

Rép. : $\mu = 1{,}65 \times 10^{-3}$ Pa.s

**Problème 6** Un bloc de 10 kg glisse à vitesse constante le long d'une surface inclinée tel qu'il est illustré à la figure P 1.6. Déterminez la vitesse du bloc si le film est constitué d'une huile lubrifiante à 20 C (tableau 1.1). Supposez que le profil de vitesse dans fluide est linéaire et que la surface de contact entre le bloc et l'huile est de 0,2 $m^2$.

Rép. : $v = 1{,}28$ m/s

**Problème 7** Une huile de viscosité $\mu = 0{,}38$ Pa.s est contenue entre 2 plaques parallèles de 0,13 $m^2$ de surface. En supposant un profil de vitesse linéaire et un espacement de 2,5 mm entre les plaques, quelle force faut-il appliquer sur la plaque du haut pour la déplacer à la vitesse constante de 0.6 m/s alors que la plaque du bas reste immobile ?

Rép. : $F = 11{,}9$ N

**Problème 8** Un mince film ($h$ = 4 mm) d'éthylène glycol à 20 °C s'écoule le long d'un plan incliné (figure P 1.8) sous l'effet de la gravité. Puisque la vitesse d'écoulement est constante dans le temps, le poids est compensé par le frottement visqueux. On sait que le profil de vitesse s'écrit :

$$v(y) = U\left(\frac{2y}{h} - \frac{y^2}{h^2}\right) \text{ m/s.}$$

a) Dites ce que représente le paramètre $U$.

b) Calculez $U$ en prenant $\alpha = 20$ °

Rép. : $U = 1{,}5$ m/s

**Problème 9** Un ballon sphérique a un rayon de 5 m. La pression atmosphérique est de 100 kPa et la température est de 20° C. Calculez la masse et le nombre de moles d'air que déplace le ballon. Si le ballon est rempli d'hélium à 100 kPa et à 20° C, quels sont la masse et le nombre de moles d'hélium.

Rép. : air : $n$ = 21,5 kmol; $m$ = 623 kg
hélium : $n$ = 21,5 kmol; $m$ = 86 kg

**Problème 10** Calculez la pression relative et la pression absolue d'un liquide de densité $\sigma$ = 1,3 à la profondeur de 10 m si la pression à la surface libre du fluide est de 120 kPa.

Rép. : $P_{abs}$ = 247,5 kPa
$P_{rel}$ = 127,5 kPa

**Problème 11** La pression relative dans un gazoduc à une altitude de 100 m, par rapport à la surface de la mer, est de 15 mmHg (figure P 1.11). Calculez la pression relative dans le même gazoduc au niveau de la mer. Les masses volumiques du gaz et de l'air environnant sont respectivement de 0,6 kg/m³ et 1,2 kg/m³. Considérez que les masses volumiques sont constantes.

Rép. : $P$ = 10,6 mm Hg

**Problème 12** On désire calculer l'intensité de la pression relative dans l'océan en admettant d'abord que l'eau salée est incompressible puis compressible.

1- Calculez cette pression pour le cas incompressible, à une profondeur de 1500 m sachant qu'à la surface la masse volumique est $\rho_0$=1025 kg/m³.

2- En admettant un coefficient $K$ de compressibilité constant, exprimez la pression $P$ à une profondeur $h$ en fonction de la masse volumique $\rho$ à cette profondeur et de $\rho_0$.

3- Exprimez la masse volumique $\rho$ en fonction de $h$, $\rho_0$ et $K$.

4- Calculez la masse volumique et la pression à la profondeur 1500 m sachant que $K$ = 2,06 GPa.

Rép. :

$1 - P = 15{,}08 \text{ MPa}$ $\qquad$ $3 - \rho = \dfrac{K\rho_0}{K - \rho_0 g h}$

$2 - P = K \ln \dfrac{\rho}{\rho_0}$ $\qquad$ $4 - P = 15{,}14 \text{ MPa}$

**Problème 13** La planète Vénus a une température moyenne de 427° C et la pression à la surface est de 2,0 MPa. Pour les besoins du calcul, on considèrera que son atmosphère est constituée de $CO_2$ uniquement (gaz parfait), que l'accélération gravitationnelle est de 8,73 m/s$^2$ et que la température est constante en fonction de l'altitude. Trouvez l'altitude à laquelle la pression atmosphérique est de 0,1 MPa. ($R$ = 188,92 J/kg*K)

Rép. : $h$ = 45390 m

**Problème 14** On a enregistré une température de -25 °C et une pression de 45,5 kPa à une certaine altitude alors que ces coordonnées sont respectivement 15 °C et 101,5 kPa au niveau de la mer. On peut supposer que la température chute uniformément à mesure que l'altitude croît. Calculez le taux de chute de température de même que la pression à une altitude de 3000 m.

Rép. : $b$ = 6,37 x 10$^{-3}$ K/m; $P$ = 70,2 Pa

**Problème 15** La pression et la température dans l'air au niveau de la mer sont respectivement 100 kPa et 288 K. La température chute au taux de 0,0065 K/m jusqu'à la stratosphère (11000 m) où elle demeure constante à 216,5 K. Calculez la pression et la masse volumique à une altitude de 18000 m. ($R$ = 287 J/kg*K)

Rép. : $P$ = 73,8 kPa ; $\rho$ = 0,119 kg/m$^3$

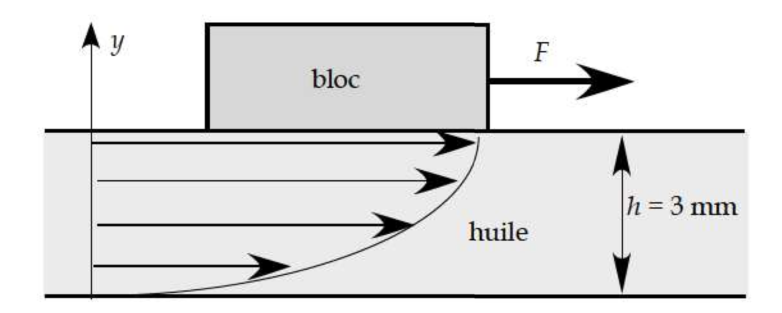



**Figure P 1.3**

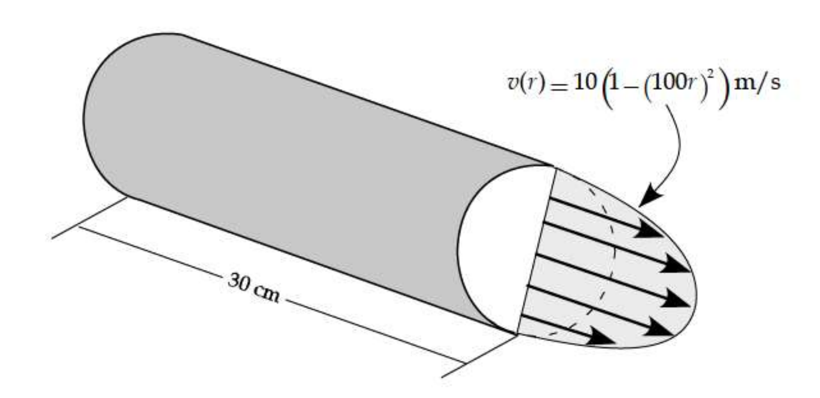



**Figure P 1.4**

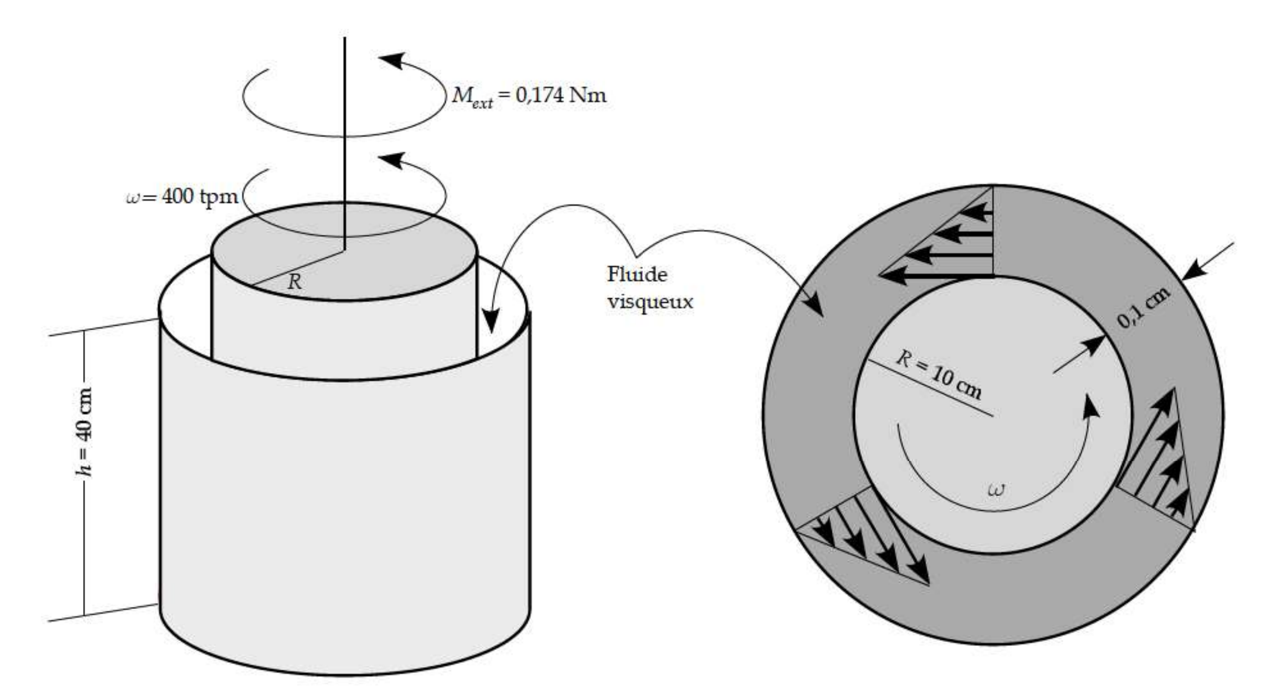



**Figure P 1.5**

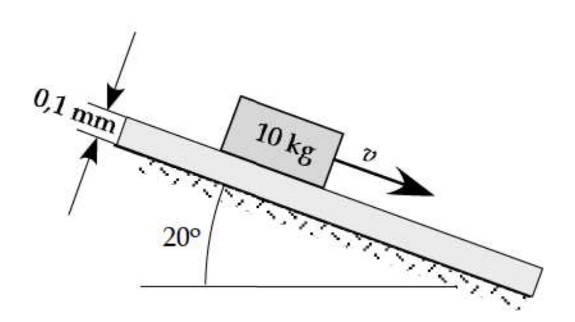



**Figure P 1.6**

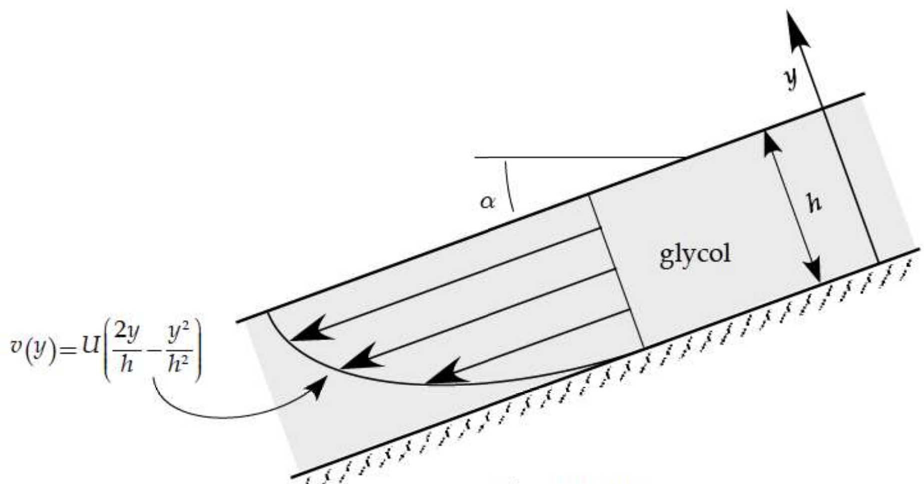



**Figure P 1.8**

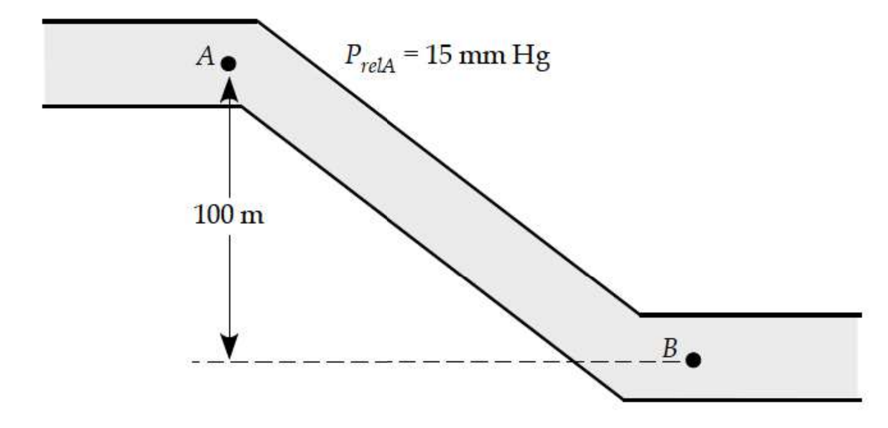



**Figure P 1.11**

# CHAPITRE 2

# LA STATIQUE DES FLUIDES

## Table des matières

**2.1 Mesures manométriques** **3**
2.1.1 Manomètre simple (tube piézométrique) 3
2.1.2 Manomètre en U 5
2.1.3 Manomètre incliné 7

**2.2 Forces hydrostatiques** **8**

**2.3 Forces hydrostatiques sur une surface plane** **8**

**2.4 Forces hydrostatiques sur une surface courbe** **16**
2.4.1 Composante horizontale $R_h$ 16
2.4.2 Composante verticale $R_v$ 18

**2.5 Poussée d'Archimède** **21**

**2.6 EXERCICES** **25**

À la fin du chapitre précédent, nous avons établi que la pression varie de façon linéaire dans un fluide au repos quand les variations de masse volumique peuvent être négligées (dans un fluide incompressible, par exemple). En effet, on se souvient que (équation (1-18)) :

$$P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

Nous ferons usage de ce résultat dans deux contextes : l'emploi de manomètres et la détermination des forces agissant sur un corps submergé.

## 2.1 Mesures manométriques

Les manomètres sont des dispositifs conçus pour la mesure de différences de pression entre deux points. Une technique standard pour mesurer la pression utilise des colonnes de liquide dans des tubes inclinés ou verticaux.

À cet effet, remarquons que pour un fluide incompressible, l'équation (1-18) peut s'écrire :

$$P_1 - P_2 = \pm \rho g h \tag{2-1}$$

selon que le point 1 est situé en-dessous (+) ou au-dessus (-) du point 2. Le paramètre $h$ désigne la différence de hauteur (ou d'altitude) entre les deux points.

### 2.1.1 Manomètre simple (tube piézométrique)

Le type de manomètre le plus simple consiste en un tube vertical, ouvert à une extrémité et relié au point de mesure à l'autre extrémité, tel qu'il est illustré à la figure 2.1

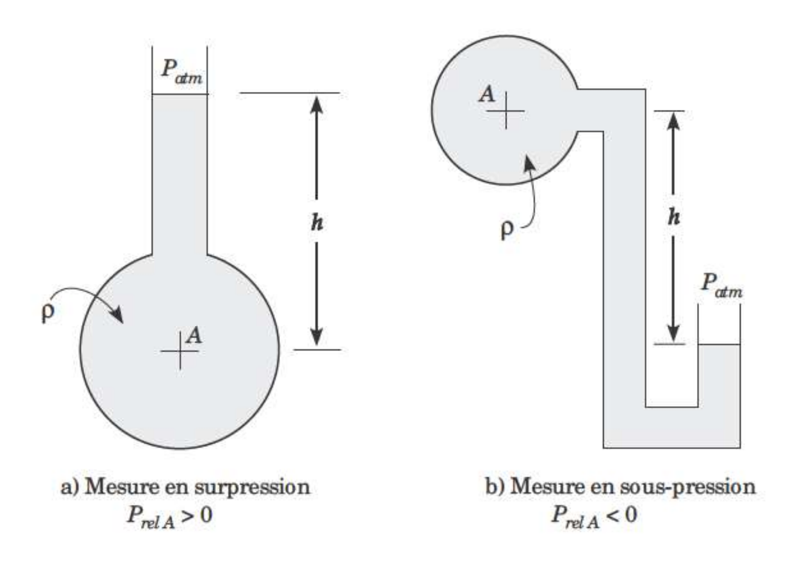



**Figure 2.1** Exemples de tubes piézométriques

La mesure de la pression atmosphérique se fait souvent en utilisant un baromètre à mercure, comme il est illustré à la figure 2.2.

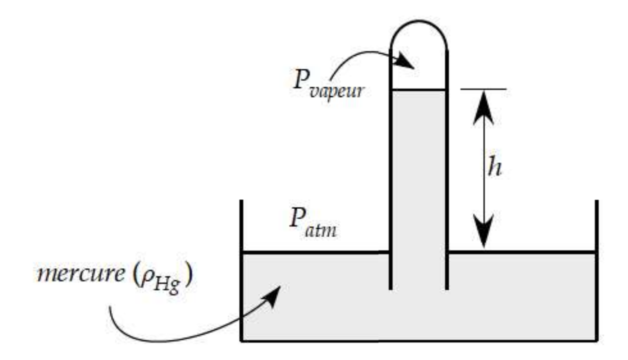



**Figure 2.2** Baromètre à mercure

Une éprouvette sous vide est plongée dans un bain de mercure. Sous l'effet de la pression dans le mercure, celui-ci s'élève dans l'éprouvette. À l'équilibre on a :

$$P_{atm} - P_{vapeur} = \rho_{Hg} g h$$

Puisque la pression de vapeur du mercure à la température ambiante est très faible (de l'ordre 10 Pa) relativement à la pression atmosphérique ($\approx 10^5$ Pa), cette dernière s'obtient, à un degré de précision élevé, par :

$$P_{atm} = \rho_{Hg} g h \tag{2-2}$$

*Les systèmes mixtes gaz-liquide*

Considérez l'enceinte de la figure 2.3 qui comporte une colonne de gaz supportée par une colonne de liquide.

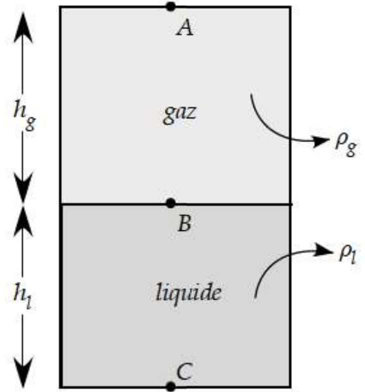



**Figure 2.3** Système mixte gaz-liquide

Dans la mesure que la pression dans le gaz varie linéairement avec la profondeur, l'écart de pression entre le sommet et la base du réservoir est donné par :

$$P_C - P_A = (P_C - P_B) + (P_B - P_A)$$
$$P_C - P_A = g(\rho_l h_l + \rho_g h_g)$$

La masse volumique d'un liquide vaut typiquement 1000 fois celle d'un gaz. Si les hauteurs $h_l$ et $h_g$ sont comparables, la variation de pression dans le gaz sera tout à fait négligeable par rapport à celle qu'on observe dans le liquide. Ainsi, à moins d'avis contraire (ou lorsque la situation l'exige), nous conviendrons que la variation de pression dans le gaz ne sera pas considérée dans le cas de systèmes mixtes. En l'occurrence, pour ce cas, on écrira :

$$P_C - P_A = \rho_l g h_l$$

### 2.1.2 Manomètre en U

Les manomètres illustrés à la figure 2.1 sont limités par la longueur du tube. Pour contourner cette difficulté, un autre type de manomètre est largement utilisé. Il est formé d'un tube en U et contient un fluide appelé « fluide manométrique ».

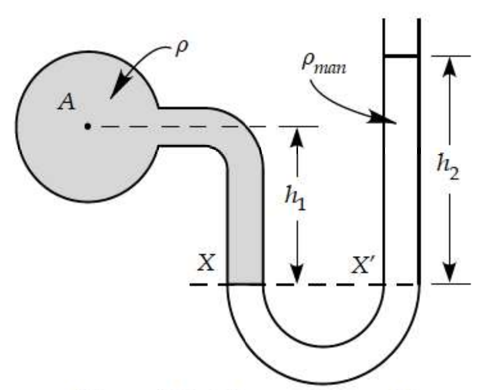



**Figure 2.4** Manomètre en U

Les pressions aux points $X$ et $X'$ de la figure précédente sont respectivement données par :

$$P_X = P_A + \rho g h_1 \qquad \text{et} \qquad P_{X'} = P_{atm} + \rho_{man} g h_2$$

Puisque $P_X = P_{X'}$, on trouve :

$$P_A + \rho g h_1 = P_{atm} + \rho_{man} g h_2$$

$$P_A = P_{atm} + \rho_{man} g h_2 - \rho g h_1 \qquad \text{(pression absolue en } A\text{)}$$
$$P_{relA} = \rho_{man} g h_2 - \rho g h_1 \qquad \text{(pression relative en } A\text{)}$$

Le manomètre en U est aussi utilisé pour mesurer la différence de pression entre deux points d'une conduite ou entre deux conduites différentes. Considérons le manomètre reliant les points $A$ et $B$ de la figure 2.5.

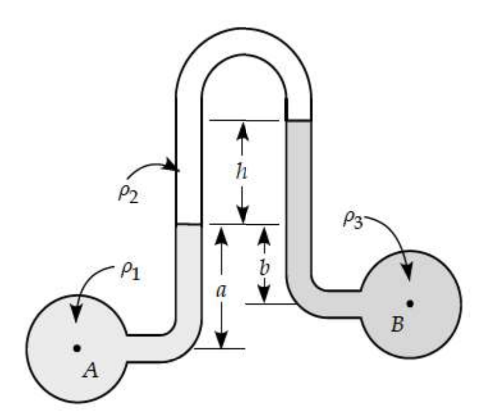



**Figure 2.5** Manomètre en U inversé reliant deux conduites

En partant du point $A$ (auquel on attribue la pression $P_A$), on « progresse » à travers le dispositif en apportant les correctifs à la pression associés (lorsque l'on monte dans le dispositif, la pression diminue, lorsque l'on descend, elle augmente) jusqu'à ce qu'on « atteigne » le point $B$. Ainsi:

$$P_A - \rho_1 g a - \rho_2 g h + \rho_3 g (h + b) = P_B$$

Donc :

$$P_A - P_B = g(\rho_1 a + \rho_2 h - \rho_3 (h + b))$$

**Exemple 2.1** : On utilise un manomètre pour mesurer la différence de pression entre les points $A$ et $B$ d'une conduite d'eau. La densité du fluide manométrique est 13,6 et le point $B$ se situe à 0,3 m au-dessus du point $A$. Calculez la différence de pression si $h$=0,7 m.

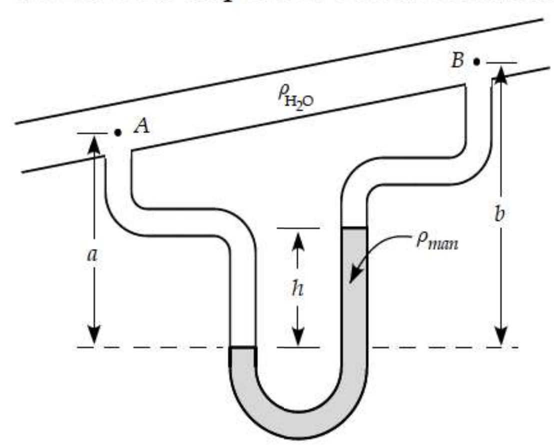



**Figure 2.6 :** Exemple 2.1.

$$P_A + \rho_{H_2O} g a - \rho_{man} g h - \rho_{H_2O} g (b - h) = P_B$$

$$P_A - P_B = \rho_{man} g h + \rho_{H_2O} g (b - a - h)$$

$$P_A - P_B = \rho_{H_2O} g ((b - a) + h(\sigma_{man} - 1))$$

$$P_A - P_B = 1000 \cdot 9{,}81\,(0{,}3 + 0{,}7(13{,}6 - 1)) = 89{,}5 \text{ kPa}$$

### 2.1.3 Manomètre incliné

Un manomètre incliné tel qu'il est illustré à la figure 2.7 peut être utile quand on veut mesurer de faibles différences de pression. Il est constitué d'un réservoir de diamètre $D$ relié à un tube piézométrique de diamètre $d$ (ouvert à l'atmosphère, par exemple).

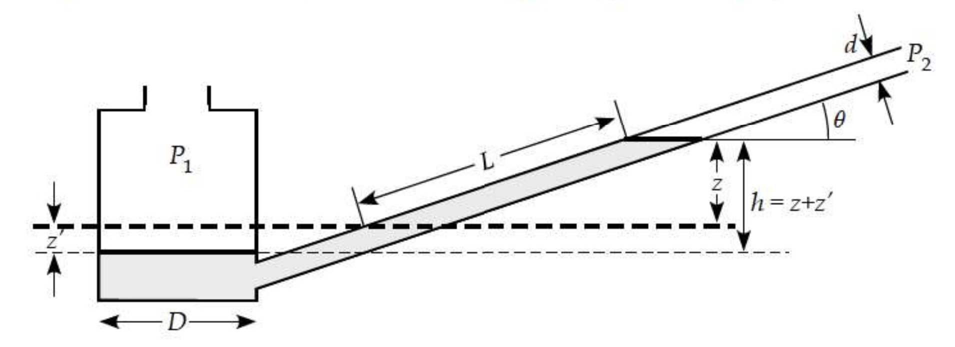



**Figure 2.7** Tube piézométrique incliné

Quand les points 1 et 2 sont soumis à la même pression (pression atmosphérique, par exemple), le niveau du liquide se situe au niveau de la ligne pointillée en traits épais. Si le point 1 est assujetti à une pression supérieure que le point 2, le liquide montera dans le tube piézométrique sur la distance $L$. La différence de pression s'obtient alors par :

$$P_1 - P_2 = \rho g h = \rho g (z + z')$$

Le volume du liquide évacué du réservoir doit correspondre au volume du tube de longueur L.

En effet on aura : $$\frac{\pi}{4} D^2 z' = \frac{\pi}{4} d^2 L$$

Alors : $$z' = L\left(\frac{d}{D}\right)^2 \quad \text{avec :} \quad z = L\sin\theta$$

$$P_1 - P_2 = \rho g \left( L\sin\theta + L\left(\frac{d}{D}\right)^2 \right)$$

$$P_1 - P_2 = \rho g L \sin\theta \left( 1 + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{d}{D}\right)^2 \right) = kL$$

Ainsi, le résultat est directement proportionnel à $L$. Une fois l'appareil calibré (la constante $k$ établie), la lecture de $L$ donne immédiatement la différence de pression recherchée. Manifestement, le dispositif est d'autant plus sensible à de faibles écarts de pression que les diamètres diffèrent et que le tube est fortement incliné.

Par exemple, si $\theta = 2°$ ; $d = 2$ cm; $D = 20$ cm; $L = 50$ cm et $\rho = 13600$ kg/m³,

$$P_1 - P_2 = 3{,}0 \text{ kPa}$$

## 2.2 Forces hydrostatiques

Un corps submergé dans un fluide au repos (en absence d'écoulement) ne ressent que l'effet de la pression puisque les forces de frottement visqueux n'agissent pas. Le propos de ce qui suit est de caractériser ces forces dites « hydrostatiques ».

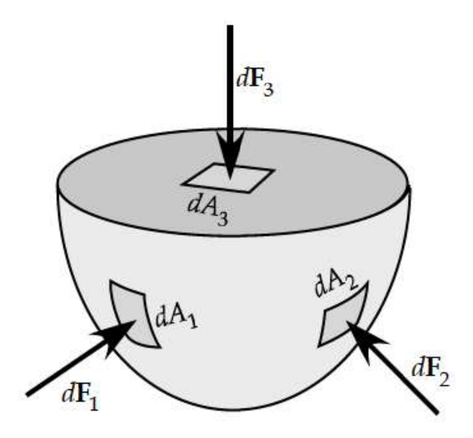



**Figure 2.8** Microforces dûes à la pression en trois points d'une surface

Pour une surface déterminée, la force hydrostatique résultante est obtenue en sommant les forces infinitésimales :

$$\mathbf{R} = \int d\mathbf{F} \tag{2-3}$$

NB : La quantité $d\mathbf{F}$ peut alternativement désignée comme un « élément de force », une « force infinitésimale » ou une « microforce ». Nous ferons usage de ces différentes appellations par la suite.

## 2.3 Forces hydrostatiques sur une surface plane

*Détermination de R*

Considérons une surface plane en contact à sa gauche avec un fluide de masse volumique $\rho$ comme il est illustré à la figure 2.9. Désignons par $O$ l'intersection entre le prolongement de la plaque et le niveau libre. On veut établir la résultante $\mathbf{R}$ de l'ensemble des microforces $d\mathbf{F}$ qui agissent sur la surface. Soit $y$, la profondeur à partir du niveau libre.

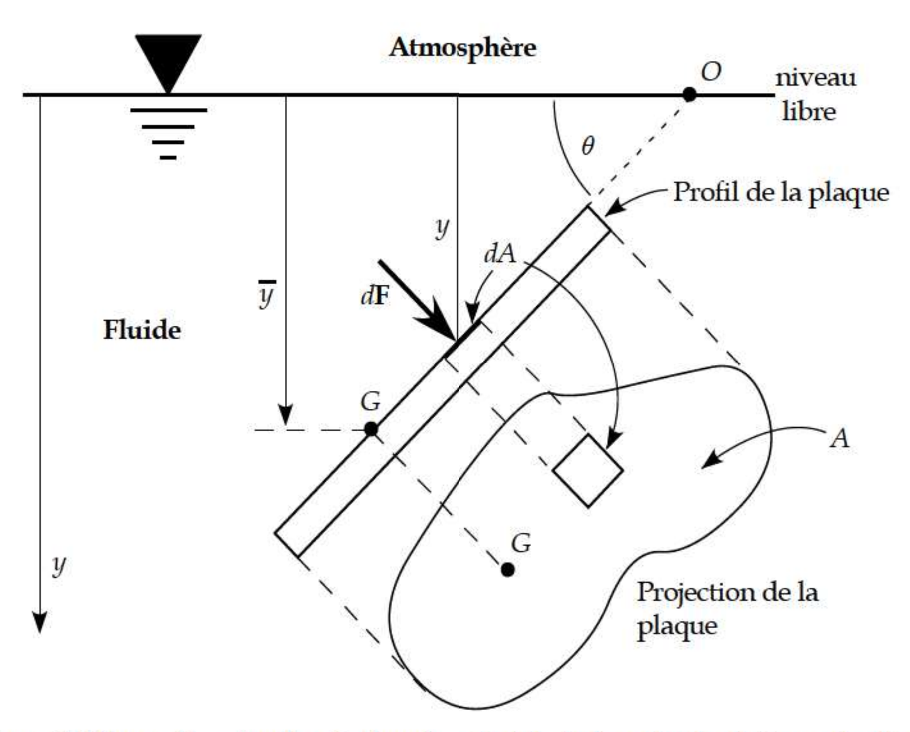



**Figure 2.9** Paramètres impliqués dans le calcul de la force hydrostatique résultante

On s'intéresse à la force *supplémentaire* résultant de l'action du fluide c'est-à-dire à la contribution qui s'ajoute aux forces produites par la pression atmosphérique. Exprimé autrement, nous voulons établir la force hydrostatique résultant de l'action de la *pression relative* uniquement. Ainsi,

$$P_{rel} = P = \rho g y \tag{2-4}$$

Comme l'indique l'expression(2-3), la somme des microforces doit s'effectuer composante à composante (c'est une somme vectorielle). Toutefois ici, puisque la surface mouillée est plane, toutes les microforces (les $d\mathbf{F}$) sont parallèles entre elles. On connaît d'emblée la direction de **R,** elle sera parallèle aux $d\mathbf{F}$, et il suffit de sommer les grandeurs des microforces pour obtenir la norme de **R**. C'est-à-dire :

$$R = \int dF$$

$$R = \int_A P dA \tag{2-5}$$

$$R = \int_A \rho g y \; dA = \rho g \int_A y \; dA$$

La *profondeur* du centre géométrique (« centre de gravité ») de la surface mouillée, mesurée à partir du niveau libre est donnée par la relation suivante :

$$\overline{y} = \frac{\int y \; dA}{A}$$

Le tableau 2.1 donne la position du centre géométrique de formes géométriques élémentaires. On trouve alors pour $R$ :

$$R = \rho g \bar{y} A \tag{2-6}$$

*Détermination de $y_C$*

De la même façon que l'on considère que le poids d'un corps agit en son centre de gravité, on fait agir **R** en un point appelé le *centre de pression C*. Notons que pour que **R** remplace adéquatement l'ensemble des microforces $d$**F** agissant sur toute la surface, il faut que **R** produise le même moment de force autour d'un point quelconque ($O$ par exemple) que l'ensemble des microforces (figure 2.10).

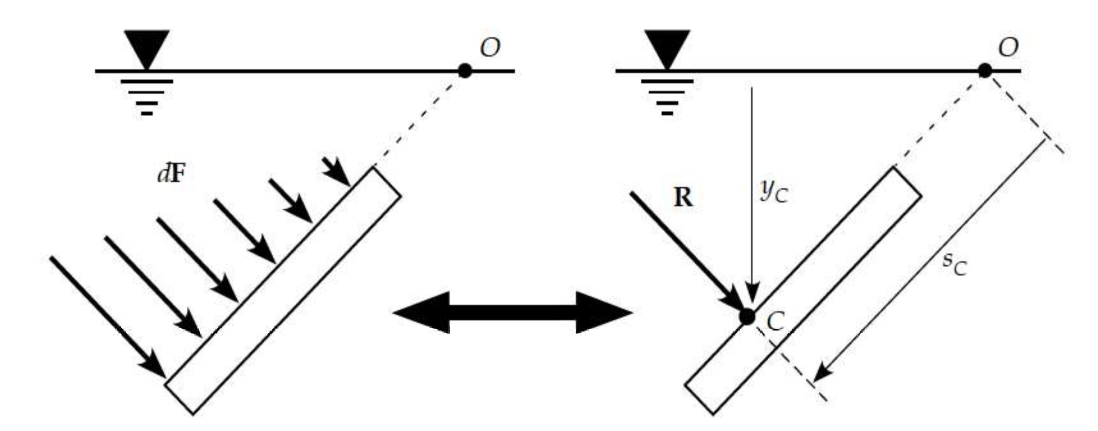



**Figure 2.10** Remplacement des microforces par la résultante

Le moment produit par la microforce $d$**F** autour de $O$ est donné par (figure 2.11) :

$$dM_o = s\ dF = sP\ dA = s\rho g y\ dA$$

or $$y = s \sin\theta\,,$$

alors : $$dM_o = \rho g s^2 \sin\theta\ dA$$

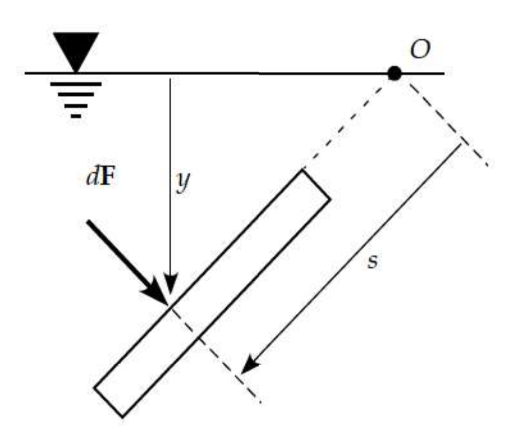



**Figure 2.11** Paramètres d'intérêt dans le calcul du moment résultant

Le moment résultant $M_O$ est donc :

$$M_O = \int_A \rho g \sin\theta s^2 dA = \rho g \sin\theta \int_A s^2 dA$$

On reconnaît $I_O$, le moment d'inertie de la surface mouillée par rapport à l'axe perpendiculaire à la feuille passant par $O$ :

$$I_O = \int_A s^2 dA$$

$$M_O = \rho g I_O \sin\theta \qquad (2\text{-}7)$$

D'autre part, en référant à la figure 2.10, on a :

$$M_O = R s_C = \frac{y_C R}{\sin\theta} \qquad (2\text{-}8)$$

Égalisant (2-7) et(2-8), on trouve :

$$y_C = \frac{\rho g I_O \sin^2\theta}{R}$$

Si on remplace $R$ par son expression en (2-6), il vient :

$$y_C = \frac{I_O \sin^2\theta}{\overline{y} A}$$

En vertu du théorème des axes parallèles,

$$I_O = I_G + \frac{A\overline{y}^2}{\sin^2\theta}$$

où $I_G$ est le moment d'inertie de la surface mouillée par rapport à l'axe normal (perpendiculaire) au plan de la figure qui passe par $G$. Les propriétés des surfaces communes apparaissent au tableau 2.2. On obtient alors pour $y_C$, la profondeur du centre de pression.

$$y_C = \frac{I_G \sin^2\theta}{\overline{y}A} + \overline{y} \tag{2-9}$$

La figure 2.12 ainsi que les équations (2-10) et (2-11) résument les conclusions auxquelles nous sommes arrivés.

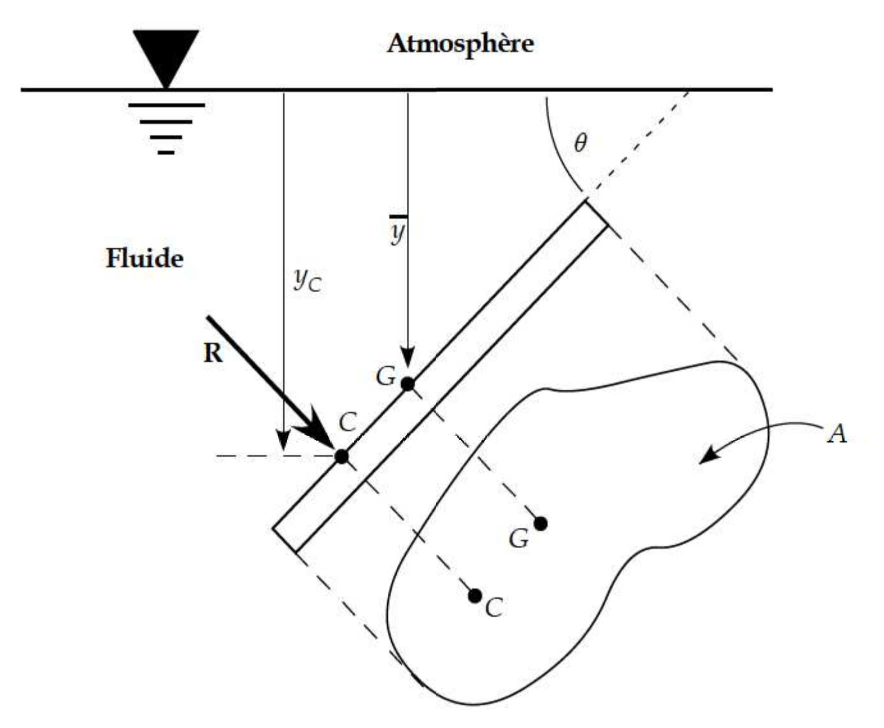


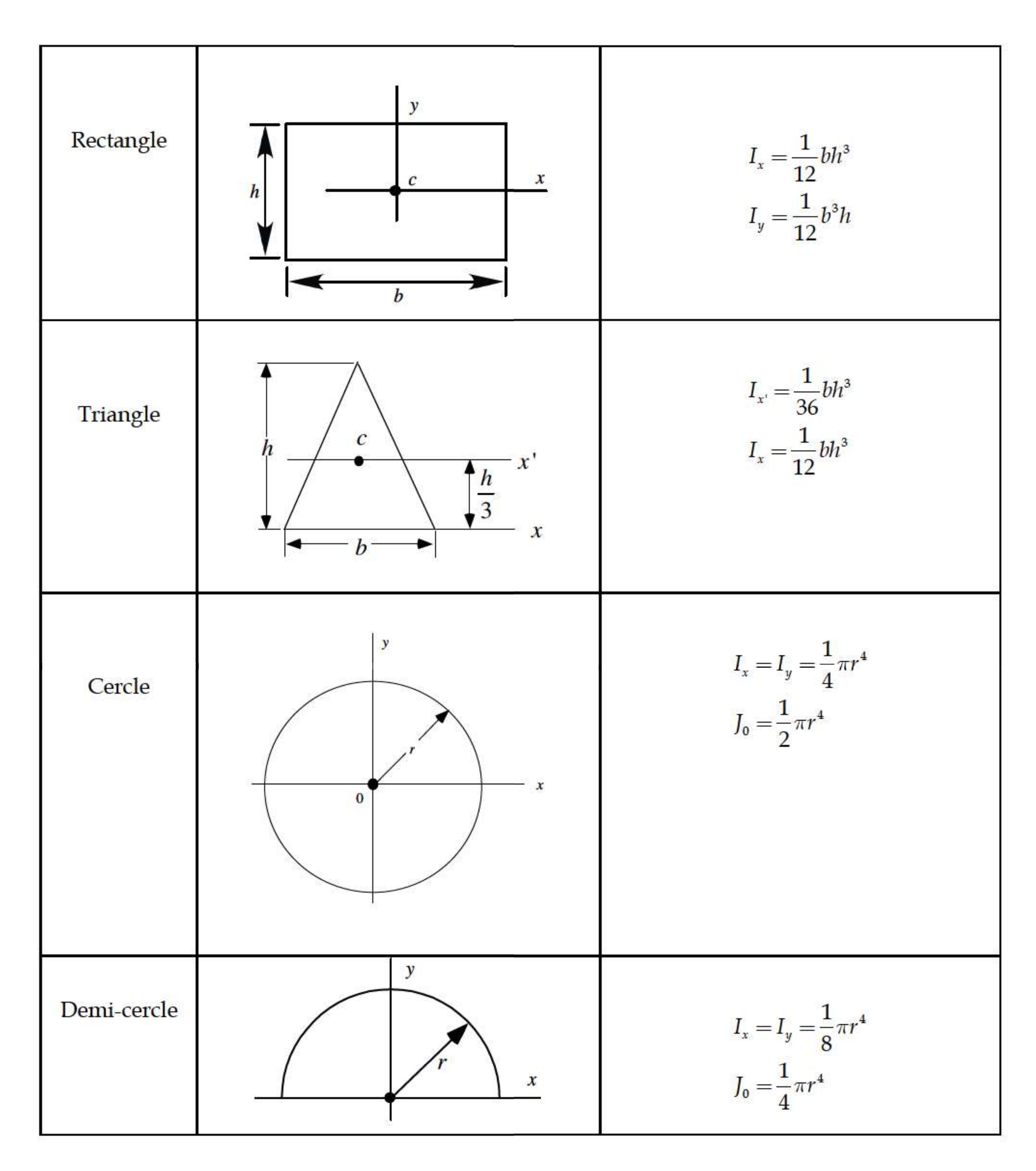

**Figure 2.12** Grandeurs pertinentes au calcul de $R$ et de $y_C$

$$R = \rho g \overline{y} A \tag{2-10}$$

$$y_C = \frac{I_G \sin^2\theta}{\overline{y}A} + \overline{y} \tag{2-11}$$

| Forme | | $x$ | $\overline{y}$ | Surface |
|---|---|---|---|---|
| Surface de triangle | | | $\frac{h}{3}$ | $\frac{bh}{2}$ |
| Surface de quart de cercle | | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{\pi r^2}{4}$ |
| Surface demi-circulaire | | 0 | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{\pi r^2}{2}$ |
| Surface de quart d'ellipse | | $\frac{4a}{3\pi}$ | $\frac{4b}{3\pi}$ | $\frac{\pi}{4}ab$ |
| Surface demi-elliptique | | 0 | $\frac{4b}{3\pi}$ | $\frac{\pi}{2}ab$ |
| Surface demi-parabolique | | $\frac{3a}{8}$ | $\frac{3h}{5}$ | $\frac{2ah}{3}$ |
| Surface parabolique | | 0 | $\frac{3h}{5}$ | $\frac{4ah}{3}$ |

**Tableau 2.1** Centres géométriques de formes géométriques élémentaires



| | | |
|---|---|---|
| Rectangle | | $I_x = \frac{1}{12} b h^3$<br>$I_y = \frac{1}{12} b^3 h$ |
| Triangle | | $I_{x'} = \frac{1}{36} b h^3$<br>$I_x = \frac{1}{12} b h^3$ |
| Cercle | | $I_x = I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$<br>$J_0 = \frac{1}{2} \pi r^4$ |
| Demi-cercle | | $I_x = I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$<br>$J_0 = \frac{1}{4} \pi r^4$ |

**Tableau 2.2** Moments d'inertie de formes géométriques élémentaires

**Exemple 2.2** : Une porte rectangulaire de 4 m de long par 2 m de profondeur est disposée le long d'une paroi inclinée d'un grand réservoir tel qu'illustré à la figure 2.13. La porte est montée sur un pivot coïncidant avec son centre géométrique. Calculez la grandeur de la force appliquée par le cran d'arrêt F sur la porte pour la maintenir immobile.

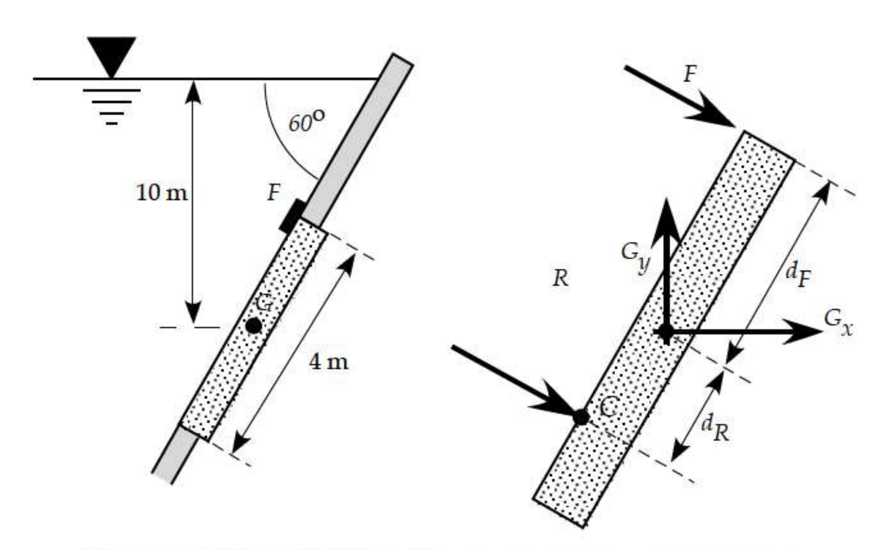



**Figure 2.13** Exemple 2.2 et diagramme de forces pour la porte

*Calcul de R*

$$R = \rho g \overline{y} A$$

où :

$$\overline{y} = 10\,\text{m} \; ; \; A = 2 \times 4 = 8\,\text{m}^2$$

$$R = 784{,}8 \text{ kN}$$

*Calcul de $y_C$*

$$y_C = \frac{I_G \sin^2\theta}{\overline{y}A} + \overline{y}$$

$$I_G = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 10{,}\overline{6} \text{ m}^4$$

$$y_C = \frac{10{,}67 \cdot 0{,}75}{10 \cdot 2 \cdot 4} + 10 = 10{,}1 \text{ m}$$

*Condition d'équilibre*

$$\sum M_G = 0$$

Avec :

$$d_R = \frac{y_C - 10}{\sin\theta} \; ; \qquad d_F = 2 \text{ m}$$

$$R \cdot \frac{y_C - 10}{\sin\theta} - 2F = 0$$

$$2F = 784{,}8 \text{ kN} \cdot \frac{0{,}1}{\sin 60^\circ} \qquad \Rightarrow \qquad F = 45{,}3 \text{ kN}$$

## 2.4 Forces hydrostatiques sur une surface courbe

Pour une surface courbe immergée, les éléments de force $d\mathbf{F}$ ne sont pas parallèles entre eux; on doit donc les sommer composante à composante.

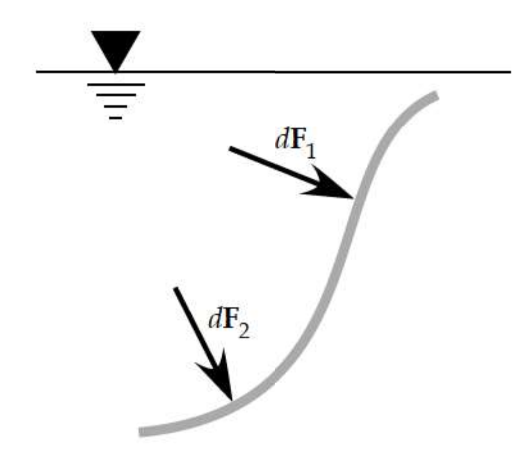



**Figure 2.14** Forces hydrostatiques sur une surface courbe

### 2.4.1 Composante horizontale $R_h$

Considérons la force infinitésimale $d\mathbf{F}$ agissant sur un élément de surface $dA$ situé à la profondeur $y$ (figure 2.15).

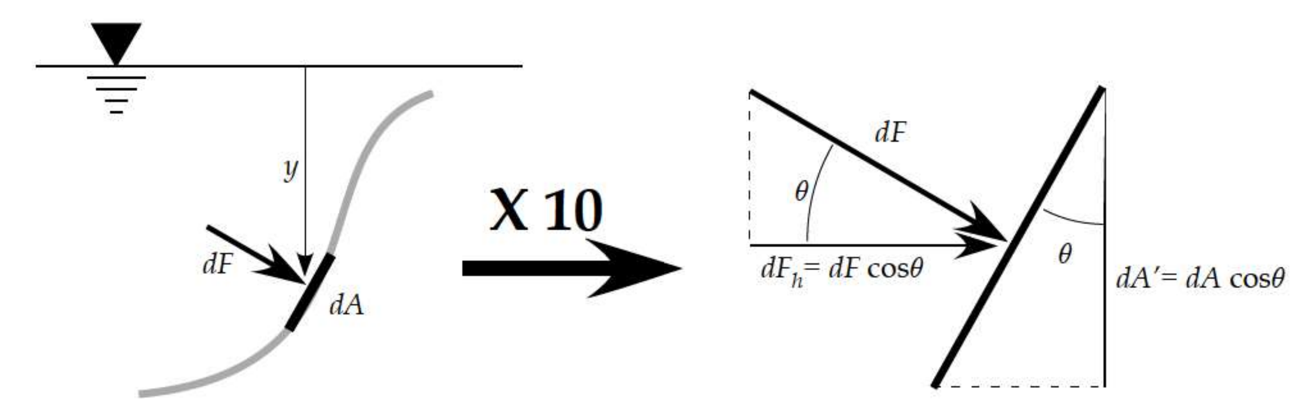



**Figure 2.15** Composante horizontale de la force infinitésimale agissant sur un élément de surface

La composante horizontale de l'élement de force $d\mathbf{F}$ est donnée par :

$$dF_h = dF\cos\theta$$

Alors :

$$R_h = \int dF_h$$

$$R_h = \int_A P\cos\theta \; dA$$

Puisque la quantité $dA\cos\theta$ représente la projection verticale $dA'$ de la surface $dA$ (figure 2.15) , alors

$$R_h = \int P\, dA'$$

Si on compare ce résultat avec celui de l'équation (2-5), on remarque qu'ils sont de la même forme. En conséquence, tout se passe comme si on établissait les caractéristiques de la force agissant sur une surface plane verticale : la surface $A'$, cette dernière correspondant à la projection sur le plan vertical de la surface courbe. Ces considérations nous permettent donc de conclure quant au calcul de $R_h$ et de l'établissement de sa ligne d'action. Puisque $R_h$ peut être vue comme la force agissant sur la surface plane $A'$, on peut lui associer un centre pression $C'$ situé à la profondeur $y_{C'}$ et on peut faire usage des formules (2-10) et (2-11) (en les adaptant à la situation, bien sûr).

$$R_h = \rho g \bar{y}' A' \tag{2-12}$$

$$y_{C'} = \frac{I_{G'}}{\bar{y}' A'} + \bar{y}' \qquad (\sin\theta = 1) \tag{2-13}$$

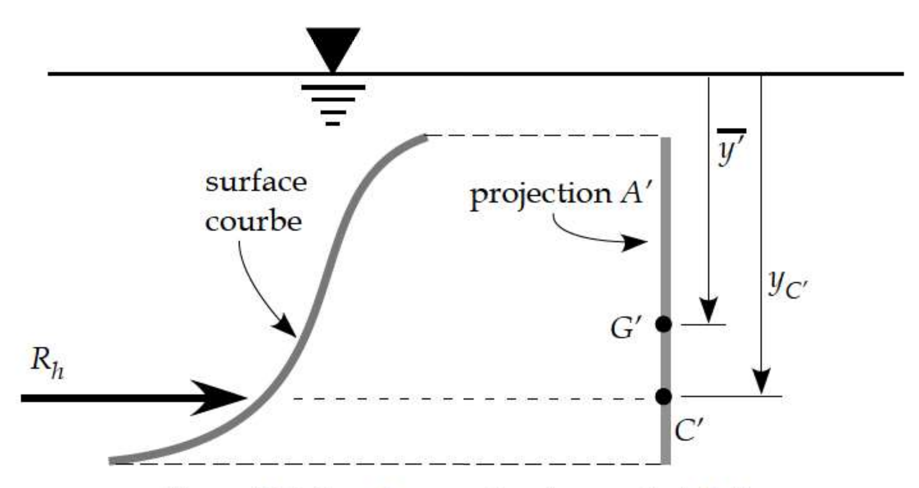



**Figure 2.16** Grandeurs pertinentes au calcul de $R_h$

### 2.4.2 Composante verticale $R_v$

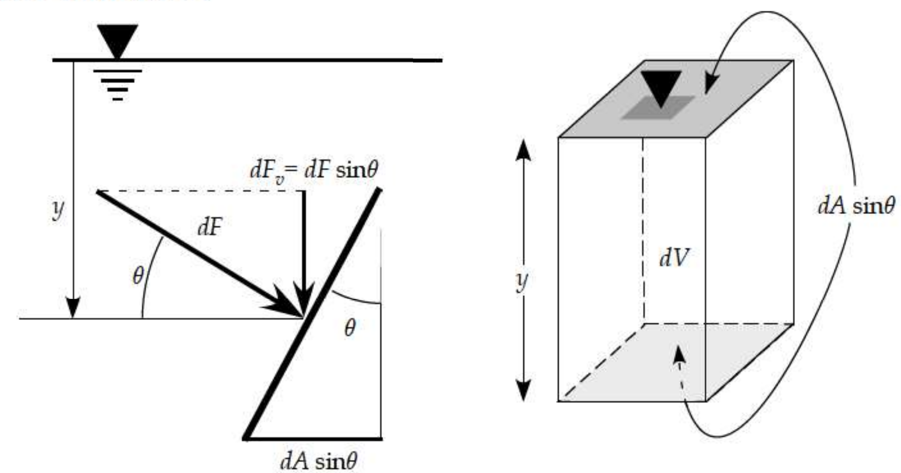



**Figure 2.17** Composante verticale de la force infinitésimale agissant sur un élément de surface.

La composante verticale de l'élément de force $d\mathbf{F}$ est donnée par :

$$dF_v = dF\sin\theta$$

puisque $$dF = P\ dA = \rho g y\ dA$$

$$R_v = \int_A dF\sin\theta = \int_A \rho g y \sin\theta\ dA$$

Référant à la figure 2.17, on observe que la quantité $y\sin\theta\ dA$ correspond à un volume : le volume infinitésimal $dV$ entre la surface mouillée et le niveau libre. Alors,

$$R_v = \rho g\int dV$$

$$R_v = \rho g V \qquad (2\text{-}14)$$

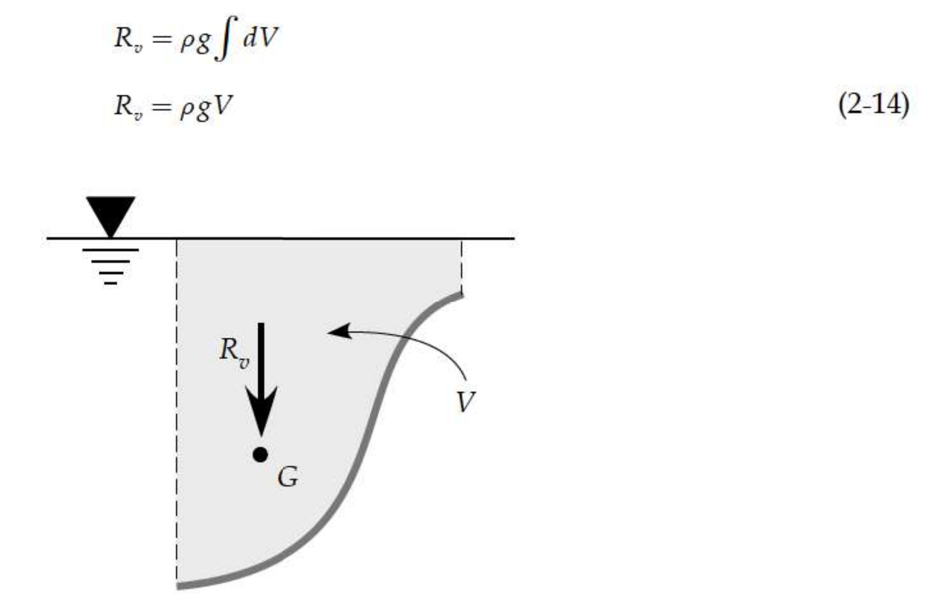



**Figure 2.18** Volume qui intervient dans le calcul de $R_v$ et ligne d'action de celle-ci

Si la force exercée par le fluide agit vers le *haut*, le calcul de $R_v$ s'effectue de la même façon. Notons que le volume qui apparaît dans (2-14) reste le volume délimité par la surface et le niveau libre (figure 2.19).

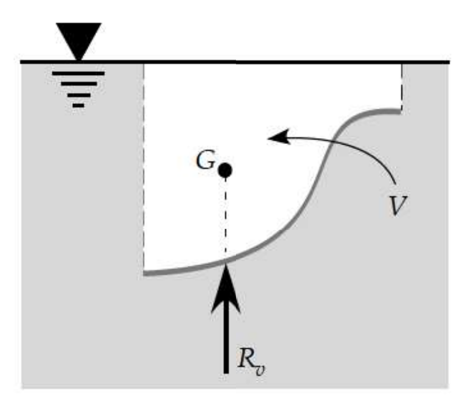



**Figure 2.19** La composante verticale $R_v$ agissant vers le haut

En tout état de cause, on observe que la formule 2.12 calcule un poids. Le poids du fluide qui occupe le volume au-dessus de la surface dans le cas de la situation de la figure 2.18, ou le poids du fluide qui *occuperait* cette région dans le cas de la situation illustrée à la figure 2.19. De ce fait, la ligne d'action de $R_v$ doit passer par le centre de gravité de cette région.

**Exemple 2.3** La figure ci-dessous représente une porte d'isolation de longueur $L$ = 6 m et de masse négligeable vue de profil et qui peut tourner autour de l'axe passant par $O$. Elle est en contact avec de l'eau à sa gauche et est maintenue en position par la force $F$. Que vaut $F$?

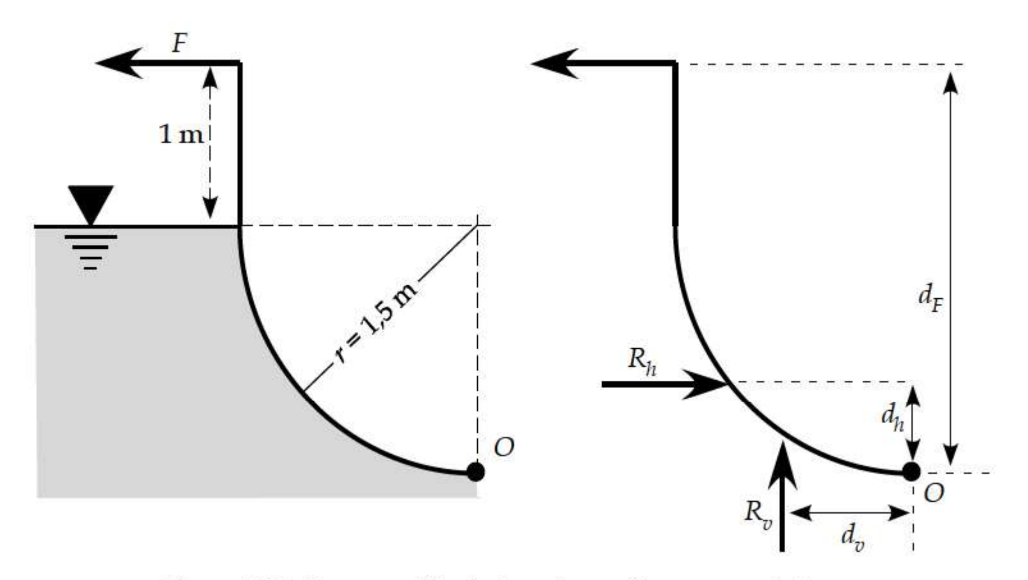



**Figure 2.20** La porte d'isolation et son diagramme de forces

*Somme des moments par rapport à O*: $\sum M_O = 0$

$$\sum M_O = Fd_F - R_h d_h - R_v d_v = 0$$

*Grandeur et ligne d'action de $R_h$*

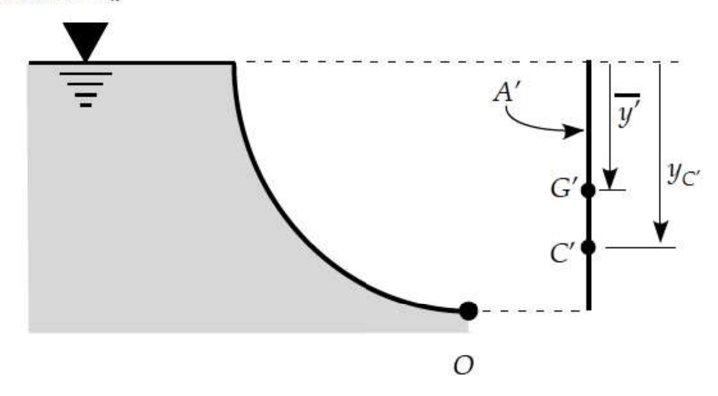



**Figure 2.21** Paramètres d'intérêt pour le calcul de $R_h$

$$R_h = \rho g \overline{y}' A' \qquad \text{où:} \quad A' = rL \;; \quad \overline{y}' = \frac{r}{2}$$

$$R_h = \frac{\rho g L r^2}{2} = 66{,}2 \text{ kN}$$

$$y_{C'} = \frac{2}{3} r = 1 \text{ m}$$

$$d_h = r - y_{C'} = 0{,}5 \text{ m}$$

*Grandeur et ligne d'action de $R_v$*

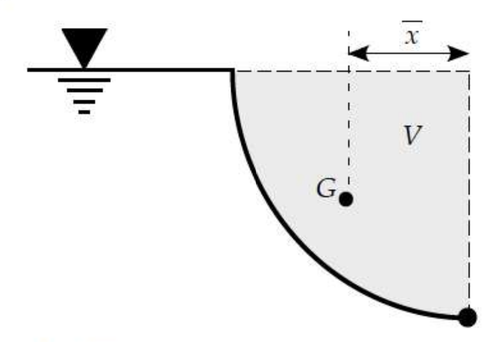



**Figure 2.22** Paramètres d'intérêt pour le calcul de $R_v$

$$R_v = \rho g V \qquad \text{avec:} \quad V = \frac{\pi r^2}{4} L$$

$$R_v = \rho g L \frac{\pi r^2}{4} = 104 \text{ kN}$$

$$d_v = \overline{x} = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}637 \text{ m}$$

*Calcul de F*

$$F = \frac{R_h d_h + R_v d_v}{d_F} = 39{,}7 \text{ kN}$$

## 2.5 Poussée d'Archimède

On veut calculer la poussée verticale $R_v$ s'exerçant sur un corps submergé (figure 2.23 a).

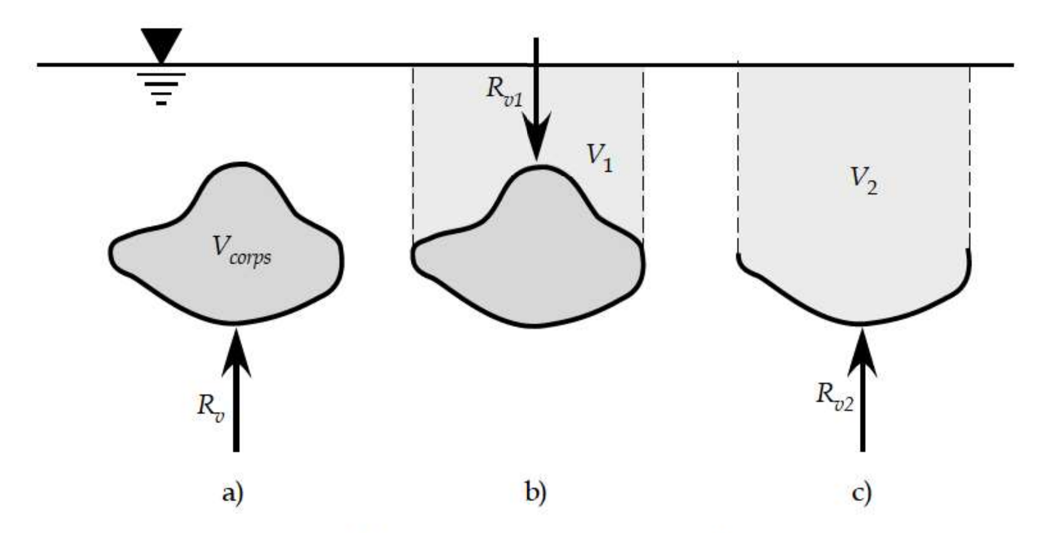



**Figure 2.23** Calcul de la poussée d'Archimède

Sur la partie supérieure de sa surface agit $R_{v1}$ (figure 2.23 b)) et sur la partie inférieure, agit $R_{v2}$ (figure 2-23 c)).

On a :

$$R_{v_1} = \rho g V_1 \quad ; \quad R_{v_2} = \rho g V_2$$

Or, la force résultante selon la verticale est donnée par

$$R_v = R_{v_2} - R_{v_1} = \rho g (V_2 - V_1)$$

$$R_v = \rho g V_{corps}$$

$$R_v = \rho g V_{fluide\ déplacé} \tag{2-15}$$

La poussée que ressent un corps submergé correspond au poids du fluide déplacé par le corps (principe d'Archimède). Fait intéressant à noter : dans ce cas où le corps est complètement submergé, la grandeur de la poussée d'Achimède est indépendante de la profondeur du corps.

**Exemple 2.4** Un corps de masse volumique $\rho_{corps}$ est en suspension dans un fluide de masse volumique $\rho_0$. Établissez la relation entre les masses volumiques.

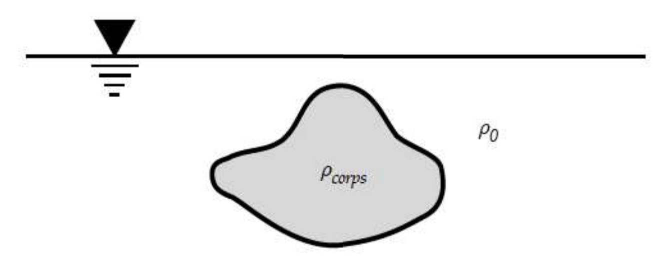



**Figure 2.25** Un corps en suspension dans un fluide.

Seules les forces de poids et de la poussée d'Archimède agissent sur le corps.

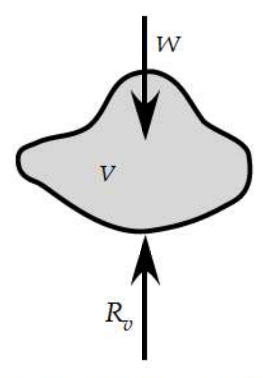



**Figure 2.26** Diagramme de forces agissant sur le corps.

Puisque le corps est en équilibre, il vient :

$$W = R_v$$
$$\rho_{corps} g V = \rho_0 g V$$
$$\therefore \quad \rho_{corps} = \rho_0$$

Ainsi, pour qu'un corps se maintienne en suspension dans un fluide, il doit présenter la même densité que le fluide. S'il est plus ou moins dense que le fluide, le poids ou la poussée d'Archimède prédominera et le corps subira une force résultante qui le fera descendre ou monter, selon le cas.

L'énoncé du principe d'Archimède (équation (2-15)) tient toujours dans le cas que le corps n'est que partiellement submergé (voyez ci-dessous).

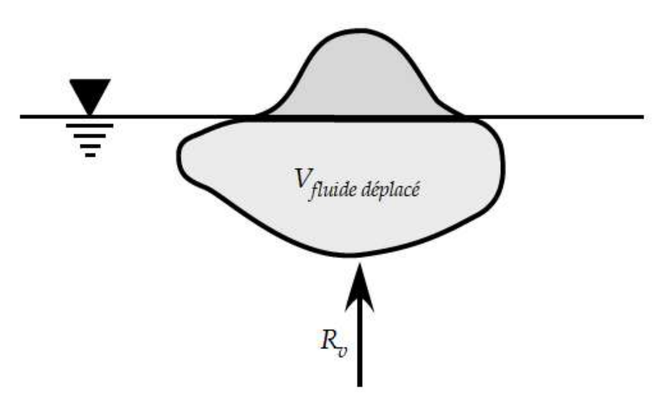



**Figure 2.24** Poussée d'Archimède; corps partiellement submergé

## 2.6 EXERCICES

**Problème 1** Calculez la pression relative en *A*, *B*, *C* et *D* de la figure P 2.1.

Rép. : -5,89 kPa; 5,89 kPa; 5,89 kPa; 22,66 kPa

**Problème 2** Soit le dispositif de la figure P 2.2. Établissez la pression relative en *A* en Pa et son équivalent en hauteur de colonne de mercure. Considérez que :
$h_1$= 20 cm, $h_2$ = 30 cm, $L$ = 40 cm, $\theta = 30°$, et $\sigma_{Hg}$ = 13,6.

Rép. : $P_{relA}$ = 64,7 kPa ou 485,6 mm$Hg$

**Problème 3** Un piston de 15 cm de diamètre est installé dans une cylindre connecté à un tube incliné comme illustré à la figure P 2.3. Le fluide manométrique est de l'huile de densité 0,85. Quand un poids *W* est placé sur le piston , le niveau de fluide passe du niveau 1 au niveau 2. Quel est le poids *W*, si on suppose que le changement de position du piston est négligeable?

Rép. : W = 11,05 N

**Problème 4** Un manomètre en U mesure la différence de pression entre deux points *A* et *B* dans un liquide de masse volumique $\rho_1$. Le manomètre contient du mercure de masse volumique $\rho_2$ (figure P 2.4).

a) Exprimez la différence de pression $P_A$ - $P_B$ en fonction des paramètres de la figure.

b) Sachant que : $a$ = 1,5 m; $b$ = 0,75m; $\rho_1$ = 1000 kg/m³; $\rho_2$ = 13600 kg/m³ et $h$ = 0,5 m, calculez $P_A$ - $P_B$.

Rép. : 54,5 kPa

**Problème 5** Calculez la différence de pression qui cause un déplacement *L* de 10 cm le long d'un tube incliné à 15° . L'apppareil contient de l'huile $(\sigma = 0,8)$. Les diamètres du réservoir et du tube incliné sont de 20 cm et 5 mm, respectivement (figure P 2.5).

Rép. : 203,6 Pa

**Problème 6** La figure P 2.6 montre deux réservoirs d'eau reliés entre eux par un manomètre en U inversé contenant du mercure. Exprimez la différence de pression en fonction des paramètres de la figure.

$$\text{Rép. : } P_A - P_B = \rho g(H_2 + h_2 - H_1 - h_1) + \rho_{Hg} g(h_1 - h_2)$$

**Problème 7** La chute de pression entre deux points d'une conduite traversée par un fluide de masse volumique $\rho$, est mesurée à l'aide d'un manomètre utilisant un liquide de masse volumique $\rho_{man}$ (figure P 2.7). Exprimez $P_B$ - $P_A$ en fonction des paramètres de la figure.

$$\text{Rép. : } P_B - P_A = g\left(\rho_{man} h - \rho(a+h)\right)$$

**Problème 8** Le manomètre en U illustré à la figure P 2.8 est utilisé pour mesurer la pression relative dans une conduite d'eau. La branche de droite contient du mercure $(\sigma = 13{,}6)$ dont le niveau libre est à 20 cm au-dessus du point $A$. Le niveau de séparation de l'eau et du mercure dans la branche de gauche se situe à 30 cm sous $A$. Calculez :

a) La pression relative en $A$.

b) La nouvelle valeur pour $h_2$ si la pression dans la conduite est réduite de 40 kPa.

Rép. : a) $P_A$ = 63,8 kPa

b) $h_2$ = 19 cm

**Problème 9** La vanne circulaire de la figure P 2.9 est présentée de profil (à gauche) et de face (à droite), respectivement. Elle pivote autour d'un axe passant par le point $P$ situé à 10 cm sous le centre de gravité. Le diamètre de la vanne est de 1,8 m. Quelle est la hauteur $h$ du niveau à partir de laquelle la porte va s'ouvrir, c'est-à-dire pour laquelle $R$ provoque un moment horaire par rapport au pivot?

Rép. : $h$ = 1,125 m

**Problème 10** Une plaque rectangulaire de 5 m sur 3 m et de masse négligeable pouvant pivoter autour d'un point O est retenue par un contrepoids comme l'illustre la figure P 2.10. Si l'angle d'inclinaison de la vanne est de 60°, déterminez la profondeur de l'eau pour que la vanne reste en équilibre.

a) Montrez que dans ce cas (plaque rectangulaire partiellement submergée), la profondeur du centre de pression est donnée par $y_C = \frac{2}{3}d$ .

b) Calculez $d$.

Rép. : $d$ = 2,66 m

**Problème 11** La vanne $AB$ en forme de quart de cylindre peut tourner autour du point $C$ comme le représente la figure P 2.11. Déterminez et situez les composantes de la force hydrostatique par unité de largeur qui s'exercent sur la vanne.

Rép. : $r_h = 19{,}6$ kN/m ; $y = 1{,}33$ m

$r_v = 30{,}8$ kN/m ; $x = 0{,}849$ m

**Problème 12** Soit une vanne de largeur $L$ qui peut s'ouvrir automatiquement par une rotation autour d'un axe passant par $O$, figure P 2.12. Calculez la profondeur $D$ pour laquelle la vanne va s'ouvrir si on néglige sa masse.

Rép. : $D$ = 2,6 m

**Problème 13** La vanne que représente la figure P 2.13 est articulée au point $H$ situé à $d$ = 1 m de profondeur. La vanne est de forme carrée de 2 m de côté et son poids est négligeable. Quelle force doit-on exercer à son extrémité pour qu'elle reste en position?

Rép. : $F$ = 32,7 kN

**Problème 14** La plaque rectangulaire, de 1,8 m par 4 m de la figure P 2.14 est retenue par le support $O$. Supposant que la composition de la plaque est homogène, déterminez le poids nécessaire de la plaque pour qu'elle se maintienne en position .

Rép. : 486,6 kN

**Problème 15** Un barrage de béton de 2 m de largeur présente une surface mouillée constituée d'une surface verticale de 10 m de hauteur terminée par un quart de cercle de rayon 1 m (voir figure P 2.15).

a) Calculez la composante horizontale $R_h$ de la force hydrostatique s'exerçant sur le barrage et la profondeur à laquelle elle agit..

b) Calculez la composante verticale $R_v$ et la distance $d_v$ entre la ligne d'action de celle-ci et la surface droite du barrage.

Rép. : a) $R_h = 1187 \text{ kN}; y_{C'} = 7{,}33 \text{ m}$

b) $R_v = 211{,}6 \text{ kN}; \quad d_v = 0{,}506 \text{ m}$

**Problème 16** Une plaque de forme circulaire de rayon $r$ est tout juste submergée (figure P 2.16).

a) Établissez $R$ ainsi que la profondeur du centre de pression en fonction de $r$ et $\theta$.

b) Sachant que $r$ = 0,5 m et $\theta = 30°$, calculez $R$, $y_C$ et le moment de force de $R$ au point A.

Rép. : a) $R = \pi \rho g r^3 \sin\theta \; ; \; y_C = 5r / 4\sin\theta$

b) $R = 1926 \text{ N} \; ; \; y_C = 0{,}3125 \text{ m} \; ; \; M_A = 722{,}3 \text{ Nm}$

**Problème 17** Considérez le barrage de béton de la figure P 2.17. Sa surface mouillée est de forme parabolique.

a) Calculez $R_h$ ainsi que sa profondeur $y_{C'}$.

b) Calculez $R_v$ ainsi que la position $d_v$ de sa ligne d'action relativement au point $B$

c) Calculez le moment de force produit par les forces hydrostatiques par rapport au point $A$.

Rép. : a) $R_h$ = 1,017 MN; $y_{C'}$ = 4,8 m

b) $R_v$ = 1,130 MN; $d_v$ = 2,25 m

c) $M_A$ = 4,057 MNm

**Problème 18** Une sphère en polypropylène immergée dans de l'eau est retenue au fond par un câble tel qu'il est illustré à la figure P 2.18. Sachant que le rayon de la sphère est de 1 m et que sa masse volumique est $\rho = 900$ kg/m³, calculez la tension dans le câble.

Rép. : 4109 N

**Problème 19** Un ressort de longueur au repos $l_0$ = 1 m et de constante de rappel $k$ = 5 kN/m est relié à un cylindre partiellement immergé comme il est illustré à la figure P 2.19. Le cylindre. fait d'aluminium $\rho$ = 2700 kg/m³, a un rayon de 18 cm et une hauteur de 50 cm. De quelle profondeur $h$ s'enfonce-t-il dans l'eau ?

Rép. : h=29,1 cm

**Problème 20** Un cube d'aluminium ($\rho$ = 2700 kg/m³) est équilibré par une masse de 2 kg lorsqu'il est immergé dans de l'éthanol à 20°C (figure P 2.20). Quelle est la longueur $l$ de l'arête du cube ?

Notez que les bras de la balance sont de même longueur.

Rép. : $l$ = 10,15 cm

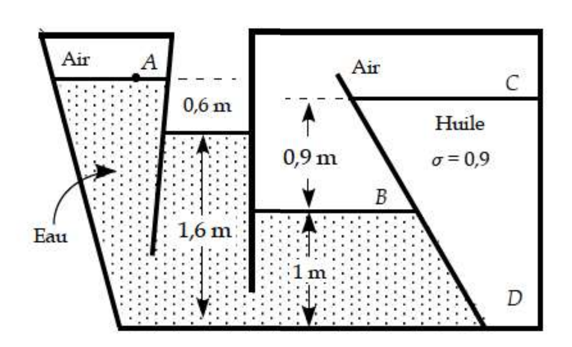



**Figure P 2.1**

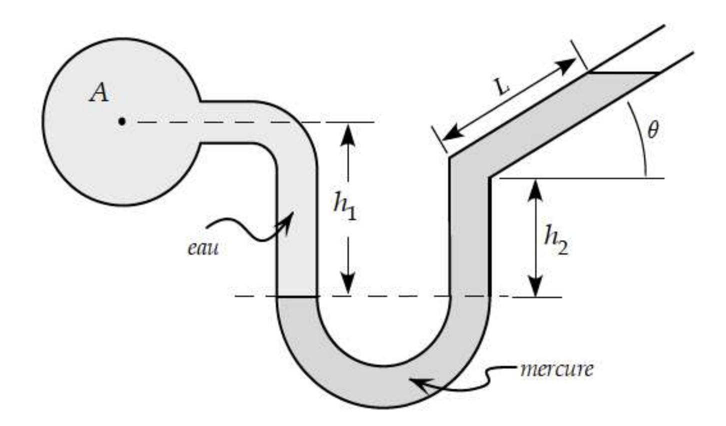



**Figure P 2.2**

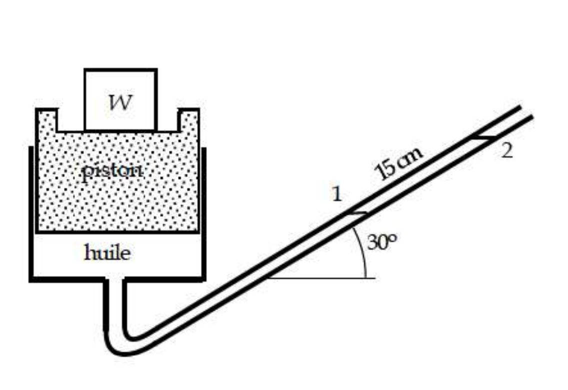



**Figure P 2.3**

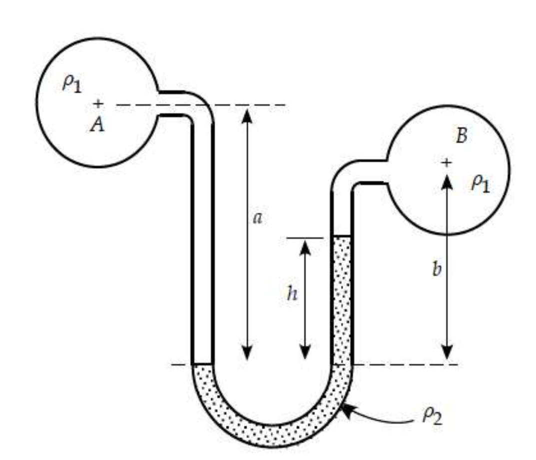



**Figure P 2.4**

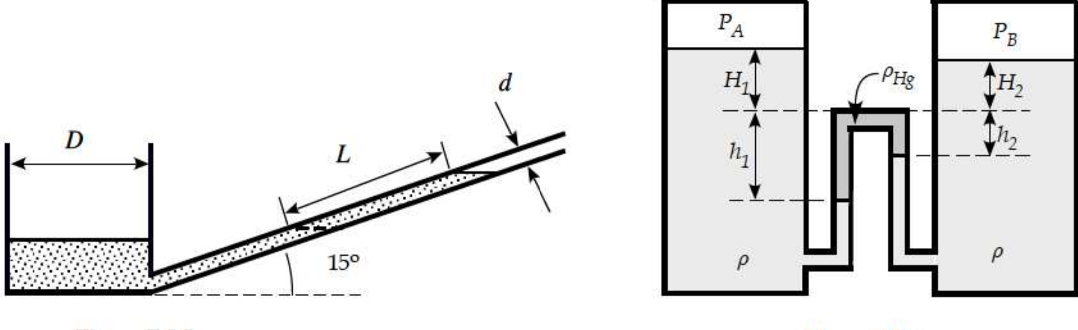



Figure P 2.5 Figure P 2.6

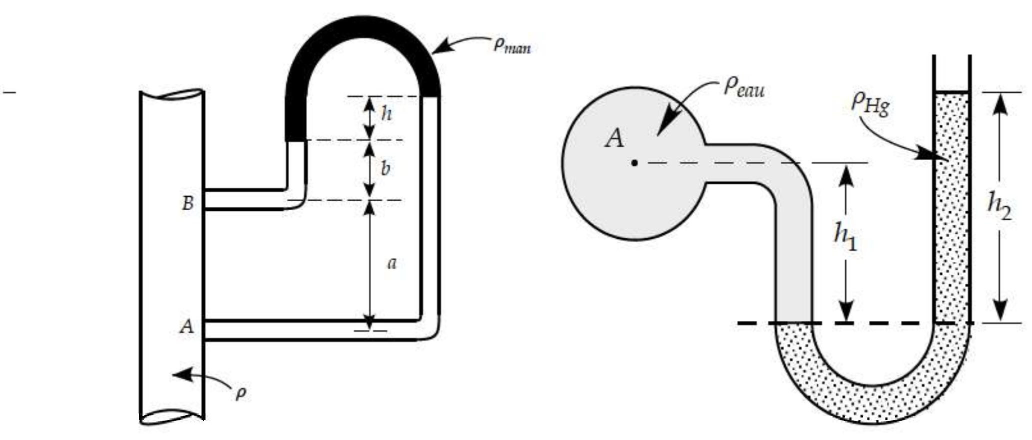



Figure P 2.7 Figure P 2.8

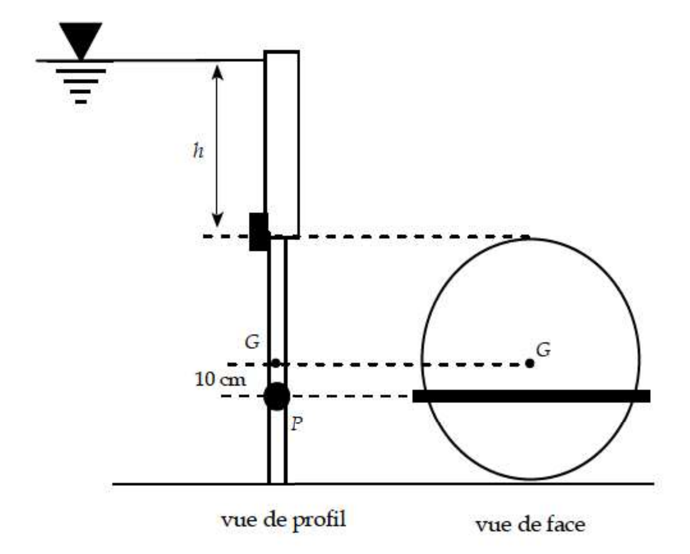



Figure P 2.9

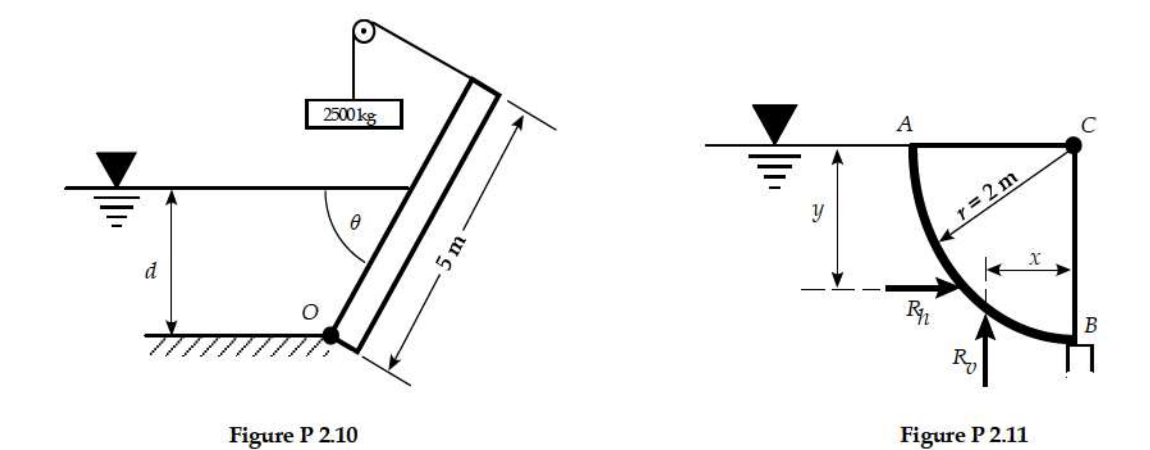



Figure P 2.10

Figure P 2.11

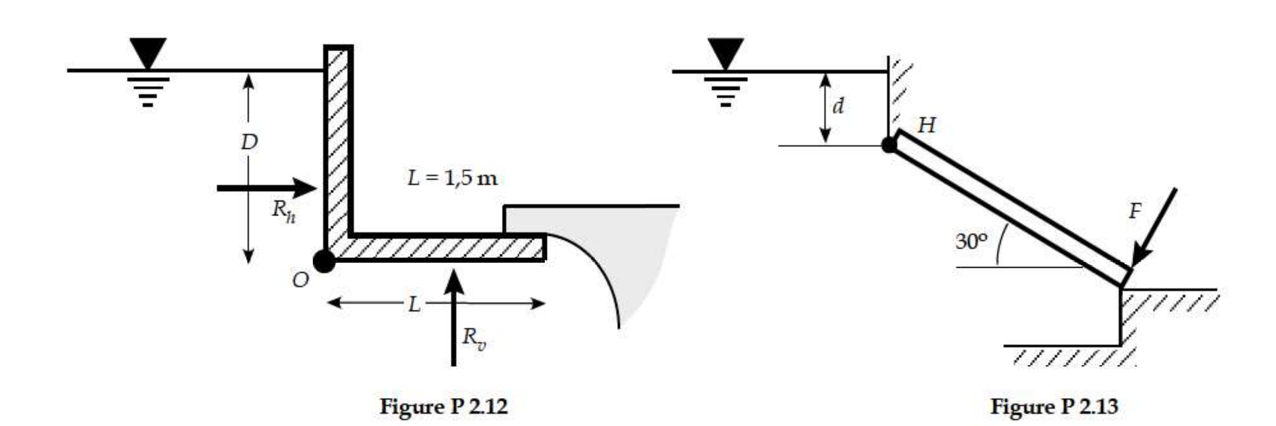



Figure P 2.12

Figure P 2.13

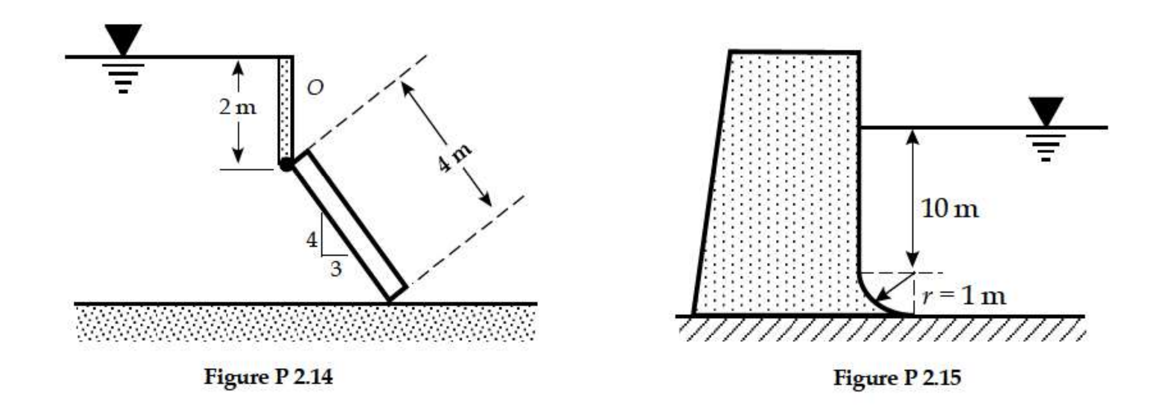



Figure P 2.14

Figure P 2.15

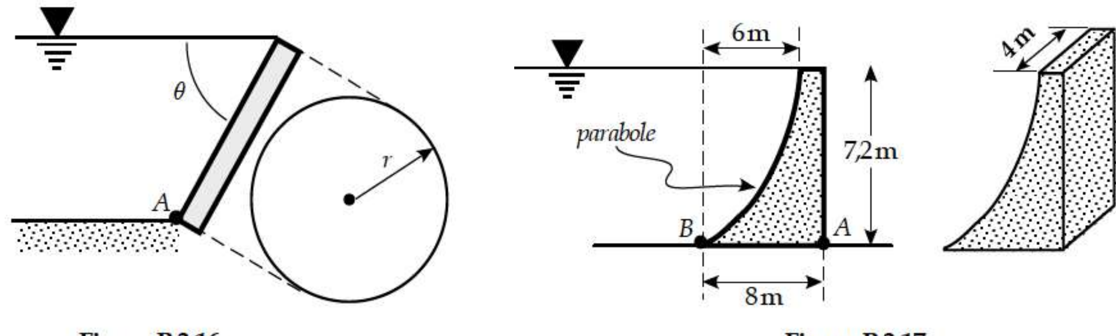



Figure P 2.16

Figure P 2.17

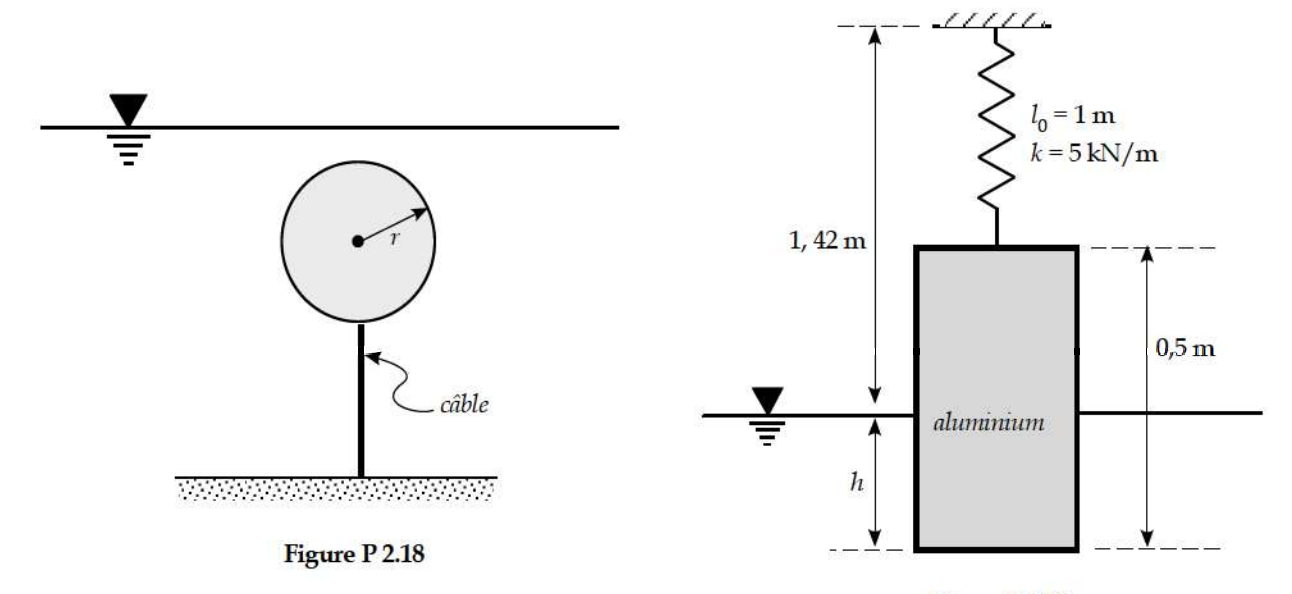



Figure P 2.18

Figure P 2.19

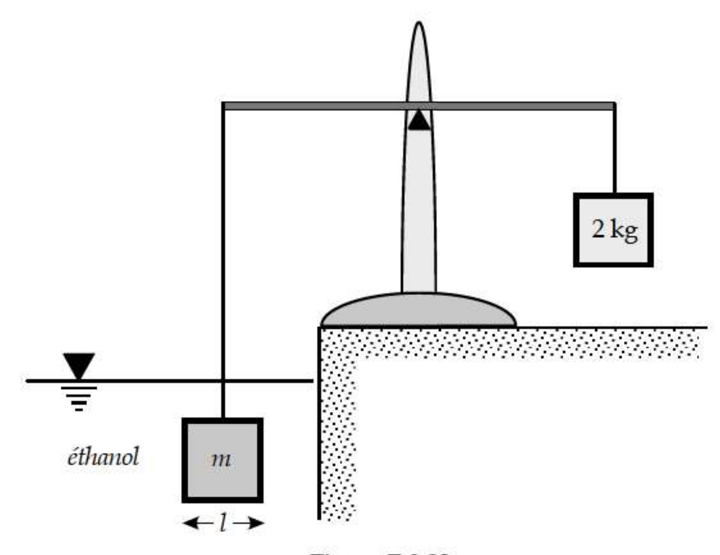



Figure P 2.20

# CHAPITRE 3

# CONCEPTS DE BASE DES FLUIDES EN ÉCOULEMENT

## Table des matières

**3.1 Approches lagrangienne et eulérienne** **3**

**3.2 Classification des écoulements** **3**
3.2.1 Fluides idéal et réel 3
3.2.2 Écoulements stationnaire et uniforme 4
3.2.3 Écoulements compressibles et incompressibles 5

**3.3 Lignes de courant** **5**

**3.4 Écoulements laminaires et turbulents** **6**

**3.5 Systèmes et volumes de contrôle** **8**

**3.6 Théorème du transport** **9**
3.6.1 Calcul des débits 11

**3.7 ANNEXE Formule générale du calcul du débit de *B*** **13**

## 3.1 Approches lagrangienne et eulérienne

Un fluide est constitué d'un nombre astronomique de particules, chacune de celles-ci étant caractérisée par sa vitesse, son accélération, son énergie, etc... En général, les propriétés de ces particules de fluide diffèrent de l'une à l'autre et peuvent, de plus, évoluer dans le temps. Deux approches pour traiter le problème de la caractérisation et la description d'un écoulement ont été avancées.

L'approche de Lagrange s'intéresse au comportement des particules individuelles et de l'évolution de leurs propriétés particulières dans le temps. Ainsi, une description complète d'un écoulement implique la connaissance de chaque propriété de chaque particule à tout instant; une tâche formidable donc.

L'approche d'Euler quant à elle, considère ce qui se passe en un point de l'écoulement en fonction du temps sans chercher à déterminer quelle particule occupe cette position à l'instant considéré. Les différentes grandeurs physiques ne sont plus des caractéristiques de particules déterminées mais du point. Ces grandeurs deviennent alors fonctions de la position et du temps. Par exemple, pour la pression, la masse volumique et la vitesse, on aura :

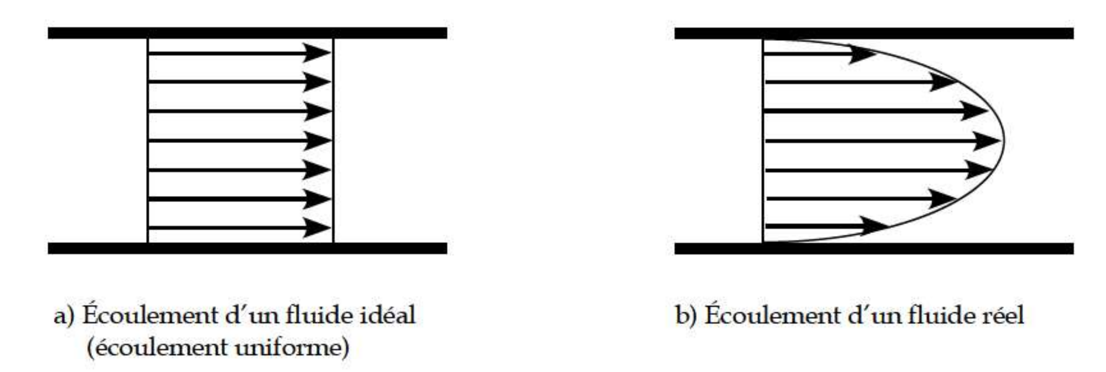
$$P = P(x,y,z,t) \qquad ; \qquad \rho = \rho(x,y,z,t)$$
$$\mathbf{v} = v_x(x,y,z,t)\mathbf{i} + v_y(x,y,z,t)\mathbf{j} + v_z(x,y,z,t)\mathbf{k}$$

Une grandeur physique fonction de la position et du temps s'appelle un « champ ». Certaines de ces fonctions retournent un scalaire comme résultat (par exemple, la pression et la masse volumique) et d'autres, un vecteur (la vitesse, par exemple).

## 3.2 Classification des écoulements

### 3.2.1 Fluides idéal et réel

Un fluide est dit idéal (ou parfait) quand sa viscosité est nulle (ainsi que sa conductivité thermique). Cette hypothèse permet manifestement de beaucoup simplifier l'étude de l'écoulement. À titre d'exemple, l'absence de viscosité rend inopérante la condition de non-glissement. En conséquence, un écoulement s'effectuant entre deux plaques présentera le profil de vitesse de la figure 3.1 a) (qu'on dénommera écoulement uniforme). En contrepartie, l'écoulement d'un fluide réel sera caractérisé par une vitesse variant d'un point à l'autre (figure 3.1 b)).



a) Écoulement d'un fluide idéal (écoulement uniforme)    b) Écoulement d'un fluide réel

**Figure 3.1** Écoulements de fluides idéal et réel

### 3.2.2 Écoulements stationnaire et uniforme

Les propriétés des fluides peuvent varier en fonction de l'espace et du temps. Quand ces propriétés sont constantes dans le temps on dit que l'écoulement est stationnaire. Cependant, si l'une de ces propriétés se modifie dans le temps, l'écoulement est dit non stationnaire. De façon similaire, un écoulement pour lequel les propriétés ne varient pas en fonction de la position est dit uniforme et non uniforme sinon.

*Écoulement stationnaire et uniforme :* exemple : $\mathbf{v} = 5\mathbf{i}$

*Écoulement stationnaire et non uniforme :* exemple : $\mathbf{v} = v_0\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right)\mathbf{j}$

*Écoulement non stationnaire et uniforme :* exemple : $\mathbf{v} = (5t + v_0)\mathbf{i}$

*Écoulement non stationnaire et non uniforme :* exemple : $\mathbf{v} = 5(1+t)\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$

*Note :* La figure qui suit illustre une situation assez commune où la vitesse change entre deux points de l'écoulement : elle passe de $v_1$ à $v_2$. L'écoulement n'est en conséquence pas uniforme. Toutefois, la vitesse ne varie pas quand on passe d'un point à l'autre de la surface $A_1$ ou de la surface $A_2$. On dira donc que la vitesse est uniforme sur ces surfaces.

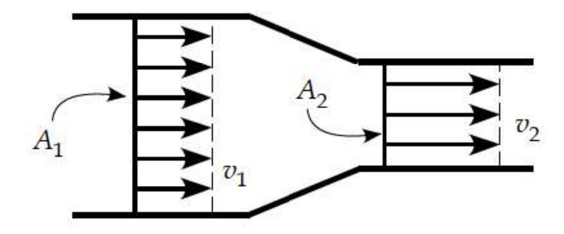



**Figure 3.2** Écoulement uniforme sur les sections $A_1$ et $A_2$

### 3.2.3 Écoulements compressibles et incompressibles

Tous les fluides sont *a priori* compressibles. Dans certaines situations d'écoulement toutefois, les variations de masse volumique sont négligeables en regard des variations des autres quantités d'intérêt. On dira alors que l'écoulement est incompressible. C'est notamment le cas pour la plupart des écoulements de liquides.

*Écoulement incompressible :* $\rho = Cte$

*Écoulements compressibles :* $\rho = \rho(t)$; ou $\rho = \rho(x,y,z)$; ou $\rho = \rho(x,y,z,t)$

## 3.3 Lignes de courant

Une ligne de courant est une ligne qui est partout tangentielle au vecteur vitesse local (l'analogue des lignes de champ électrique et magnétique) à l'instant considéré.

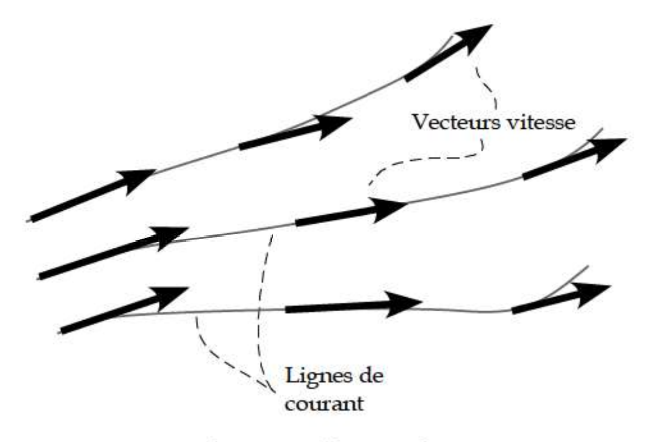
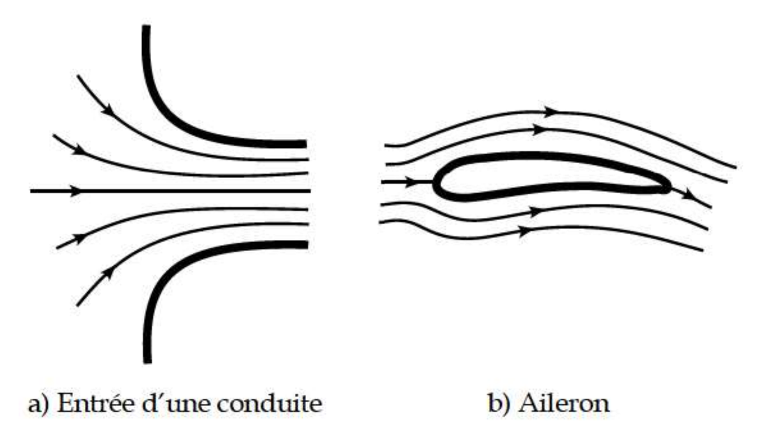



**Figure 3.3** Lignes de courant

Les lignes de courant constituent un outil de visualisation utile. En particulier, en situation d'écoulement stationnaire, elles correspondent aux trajectoires des particules.



a) Entrée d'une conduite b) Aileron

**Figure 3.4** Les lignes de courant correspondent aux trajectoires en situation d'écoulement stationnaire

On peut définir une région de forme cylindrique centrée sur une ligne de courant qu'on nomme tube de courant (figure 3.4). La région ne comporte qu'une entrée et une sortie de surfaces infinitésimales. Il n'y a donc aucun transport de masse à travers la paroi latérale du tube (figure 3.5).

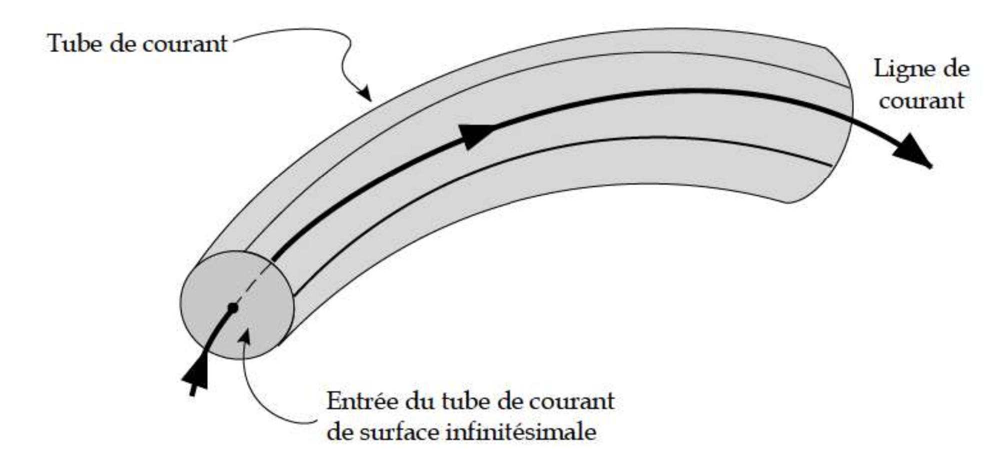



**Figure 3.5** Tube de courant

## 3.4 Écoulements laminaires et turbulents

Les écoulements de fluides réels (donc visqueux) sont classifiés en écoulements laminaires ou turbulents. Un écoulement laminaire est caractérisé par un mouvement ordonné des particules et le fluide semble être constitué de « lamelles » glissant les unes sur les autres. Dans cette situation, les forces visqueuses dominent sur les effets d'inertie (qui entraînent l'apparition de désordre). En conséquence, les échanges de masse d'une lamelle à l'autre se font à l'échelle microscopique uniquement et le mélange est pratiquement inexistant.

L'écoulement turbulent est caractérisé par un déplacement désordonné des particules et souvent par l'apparition de tourbillons longitudinaux ou transversaux. Il donnera donc lieu à un mélange intense du fluide. La vitesse, l'accélération et les autres propriétés de la particule deviennent alors imprévisibles.

Reynolds conçut une expérience permettant d'exhiber les comportements décrits plus haut. Dans une conduite circulaire à travers laquelle s'écoulait de l'eau, il pensa injecter de la teinture d'iode afin de visualiser le déplacement des particules de fluide. En faisant varier les paramètres de vitesse d'écoulement et de diamètre il observa et caractérisa la transition d'écoulement laminaire en écoulement turbulent. Il répéta par la suite l'expérience en changeant la nature du fluide en écoulement. C'est lui qui inventa le terme de « laminaire » lorsqu'il lui apparut que l'écoulement s'apparentait à un ensemble de lamelles superposées.

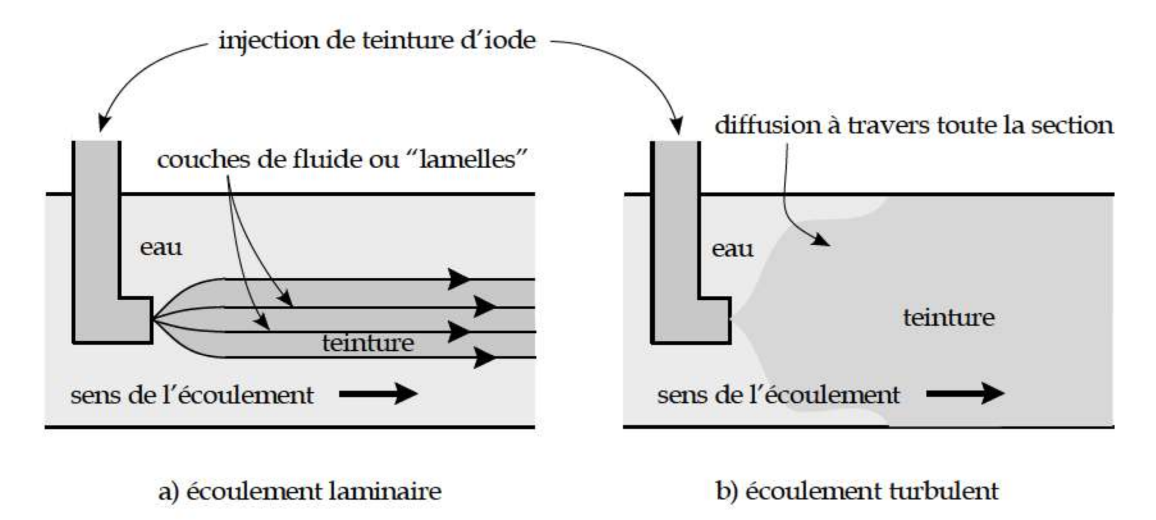



**Figure 3.6** Expérience de Reynolds

Par le biais de l'analyse dimensionnelle il est possible de se doter d'une « mesure » qui permet la classification en termes d'écoulement laminaire ou turbulent. Cette grandeur, le nombre de Reynolds (Re), correspond au rapport des forces d'inertie (qui induisent de la turbulence) et des forces de frottement visqueux (qui tendent à maintenir l'écoulement ordonné). À la suite, nous considérerons plus particulièrement les écoulements à travers des conduites. Dans ce cas, le nombre de Reynolds est défini par :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \overline{v} D_H}{\mu} \tag{3-1}$$

Or, la viscosité cinématique est définie par : $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$

on a donc, aussi :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \overline{v} D_H}{\mu} = \frac{\overline{v} D_H}{\nu} \tag{3-2}$$

où $\overline{v}$ désigne la vitesse moyenne de l'écoulement (définie au chapitre 4) et $D_H$, le diamètre hydraulique défini par :

$$D_H = \frac{4(\text{section de passage})}{\text{périmètre mouillé}} \tag{3-3}$$

En particulier, pour une section circulaire de diamètre $D$,

$$D_H = D$$

L'observation a permis de dégager les critères suivants, en ce qui concerne les écoulements en conduite. L'écoulement est dit

| | |
|---|---|
| **laminaire** si | $\mathrm{Re} < 2000$ |
| **transitoire** si | $2000 < \mathrm{Re} < 4000$ |
| **turbulent** si | $\mathrm{Re} > 4000$ |

**Exemple 3.1 :** Une conduite de 4 cm de diamètre transporte de l'eau à 20° C. Quelle est la vitesse moyenne maximale permise pour que l'écoulement reste laminaire.

Du tableau 1.1 on tire : $\nu = 10^{-6}\ \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}$

$$\text{Re}_{\max} = \frac{\overline{v}_{\max} D}{\nu} = 2000$$

$$\overline{v}_{\max} = \frac{\text{Re}_{\max}\,\nu}{D} = \frac{2000 \times 10^{-6}}{0{,}04} = 0{,}05 \text{ m/s}$$

**Exemple 3.2 :** Une conduite à section rectangulaire de 20 cm x 40 cm transporte de l'air à 50° C. Quelle est la nature de l'écoulement si la vitesse moyenne est de 50 m/s et la viscosité cinématique de 1,79 x $10^{-5}$ m²/s.

$$\text{Re} = \frac{\overline{v} D_H}{\nu}$$

$$D_H = \frac{4\,(0{,}2 \times 0{,}4)}{2(0{,}2 + 0{,}4)} = 0{,}2\overline{6} \text{ cm}$$

$$\text{Re} = \frac{50 \times 0{,}2\overline{6}}{1{,}79 \times 10^{-5}} = 745000$$

Re > 4000, alors l'écoulement est turbulent.

### 3.5 Systèmes et volumes de contrôle

Pour être en mesure de formuler les lois physiques fondamentales et les appliquer, il faut un objet d'étude. Deux types de ces objets seront considérés ici : le système et le volume de contrôle.

Un système est constitué d'une masse de fluide *spécifique* (on peut penser que les atomes qui le constituent sont « marqués », en quelque sorte), et son étude consiste à en suivre l'évolution dans le temps. Toutefois, un système en écoulement se déplace constamment, sa forme peut changer, il peut même se scinder en plusieurs parties (figure 3.7).

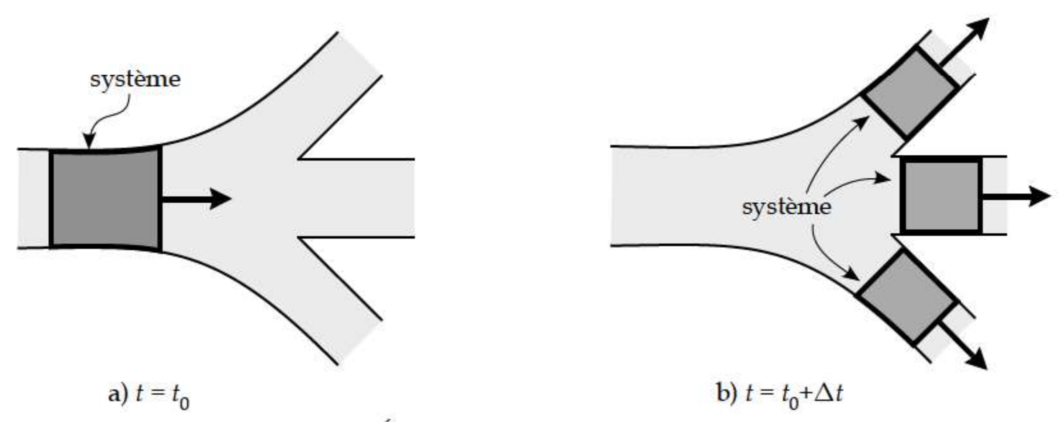
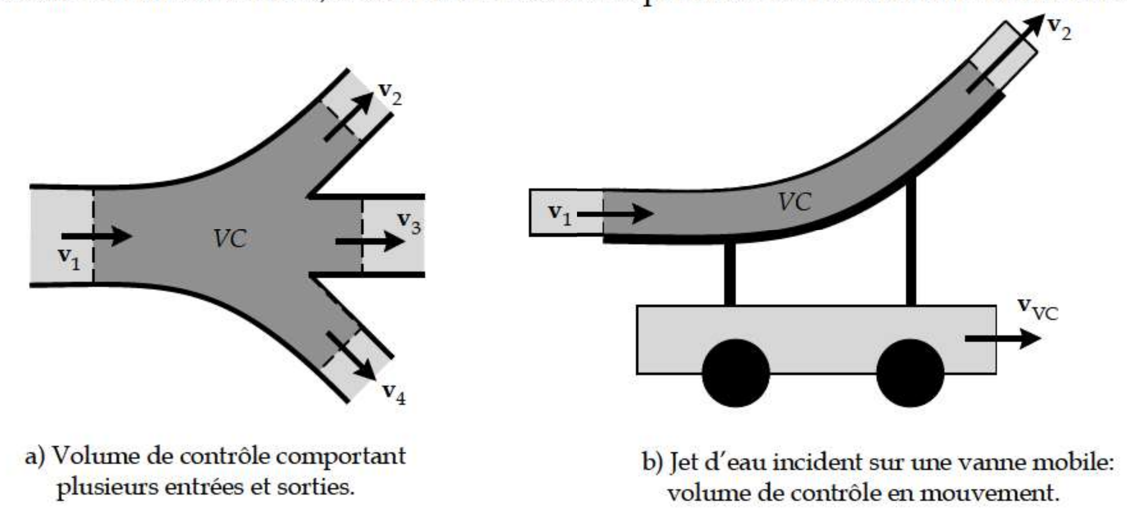



**Figure 3.7** Évolution d'un système dans le temps

Un volume de contrôle est une région de l'espace désignée pour l'analyse. Le choix du volume de contrôle est complètement arbitraire. Il peut être de dimension finie ou infinitésimale, immobile ou en mouvement, ses limites elles-mêmes peuvent être fixes ou en mouvement.




a) Volume de contrôle comportant plusieurs entrées et sorties.

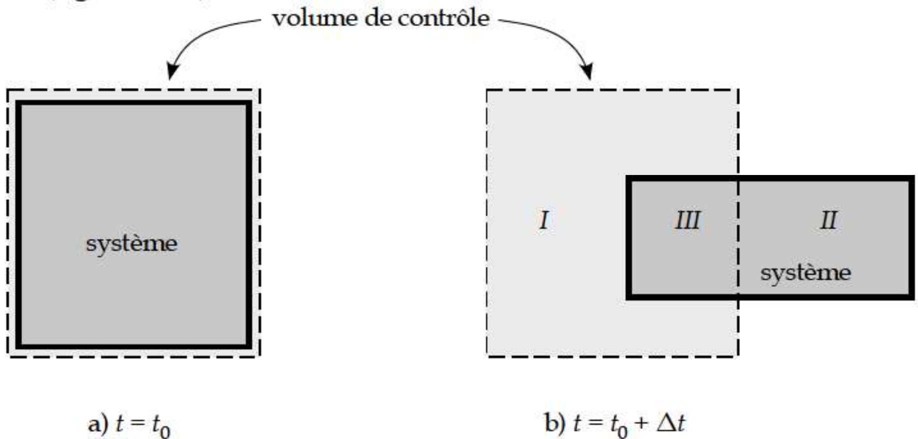
b) Jet d'eau incident sur une vanne mobile: volume de contrôle en mouvement.

**Figure 3.8** Exemples de volumes de contrôle

### 3.6 Théorème du transport

À la suite, nous établirons les équations fondamentales de la dynamique des fluides. Les lois physiques qu'elles incarnent (conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement et conservation d'énergie) s'appliquent à la matière, à des systèmes donc. Il faut en conséquence se doter d'un outil qui permette de traduire l'application de ces lois à des propriétés de certaines régions de l'espace (des volumes de contrôle ou des portions de ceux-ci). Cet outil, c'est le théorème du transport.

Considérons une propriété de la matière quelconque que l'on choisit étudier (dans le cas qui nous occupe : il s'agira de la masse, de l'énergie ou de la quantité de mouvement) et désignons-la par $B$. Étant donné un volume de contrôle, on choisit comme système la masse qui l'occupe à $t = t_0$ (figure 3.9 a).




a) $t = t_0$ b) $t = t_0 + \Delta t$

**Figure 3.9** Théorème du transport

Du fait de l'écoulement, à $t + \Delta t$, une partie du système a évacué le volume de contrôle : le système occupe désormais les régions *II* et *III*. Pour la même raison, une portion du volume de contrôle, la région *I*, est maintenant occupée par du fluide n'appartenant pas au système.

On veut caractériser l'évolution de la propriété du système $B_{sys}$ en fonction du temps.
Désignons par $B_{VC}$, la propriété $B$ de la matière occupant le volume de contrôle.
On a donc que :

$$B_{sys}(t_0) = B_{VC}(t_0).$$

Toutefois, à $t + \Delta t$, $B_{sys}$ devient :

$$B_{sys}(t_0 + \Delta t) = B_{VC}(t_0 + \Delta t) + \delta B_{II} - \delta B_I$$

Remarquons que puisque $B$ est une propriété de la matière, elle lui est « attachée ». Ainsi, la portion du système qui a évacué le volume de contrôle (région *II*) transporte avec elle la quantité de $B$ qui lui est associée, $\delta B_{II}$. À titre d'exemple, si $B$ représente l'énergie $E$, alors $\delta E_{II}$ quantifie l'énergie qui sort du volume de contrôle avec la masse à laquelle elle appartient en raison de l'écoulement. Manifestement, $\delta B_I$ joue le même rôle pour la masse qui entre dans le volume de contrôle.

En divisant par l'intervalle de temps que l'on fait tendre vers 0 :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta B_{sys}}{\Delta t} = \frac{\Delta B_{VC}}{\Delta t} + \frac{\delta B_{II}}{\Delta t} - \frac{\delta B_I}{\Delta t}$$

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{VC}}{dt} + \dot{B}_{II} - \dot{B}_I \qquad \text{(3-4)}$$

$\frac{dB_{sys}}{dt}$ représente le taux de variation de la propriété $B$ du *système*.

$\frac{dB_{VC}}{dt}$ représente le taux de variation de la propriété $B$ de la masse occupant le *volume de contrôle*.

$\dot{B}_I$ et $\dot{B}_{II}$ sont les débits de $B$ associés aux masses qui entrent dans le volume de contrôle et qui en sortent, respectivement. Ils mesurent donc les quantités de $B$ traversant les frontières du volume de contrôle par unité de temps en raison de l'écoulement.

La différence $\dot{B}_{II} - \dot{B}_I$ correspond au débit *net* de $B$ sortant du volume de contrôle. En général son calcul peut être laborieux (voyez l'annexe à la fin du chapitre). Si, toutefois, le volume de contrôle ne comporte qu'un nombre fini d'entrées et de sorties, l'équation (3-4) peut se récrire :

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{VC}}{dt} + \sum_s \dot{B} - \sum_e \dot{B} \qquad \text{(3-5)}$$

Où les symboles $\sum_s$ et $\sum_e$ désignent les sommes sur l'ensemble des sorties et des entrées, respectivement. L'équation (3-5) constitue la forme du théorème de transport que nous emploierons.

### 3.6.1 Calcul des débits

La propriété $B$ dont nous avons discuté plus haut remplace n'importe quelle des grandeurs de masse, énergie et quantité de mouvement. Ces grandeurs sont toutes proportionnelles à la taille du système ou à la masse. Définissons $b$ :

$$b \equiv \frac{B}{m}$$

À titre d'exemple, $e = \frac{E}{m}$ désigne l'énergie par kilogramme de matière.

Considérez la figure 3.10. Durant l'intervalle $\Delta t$, la masse $\delta m$ traverse la surface $A$. Dans un premier temps, supposons que la vitesse de l'écoulement, la masse volumique ainsi que la propriété $b$ sont constantes durant $\Delta t$ et uniformes dans l'ensemble du volume représenté et en particulier sur la surface $A$.

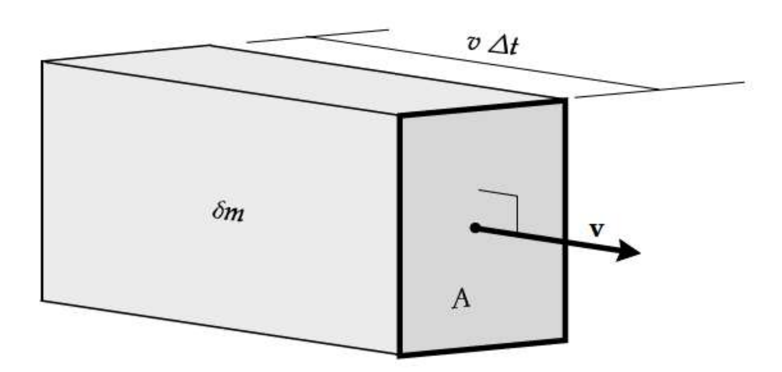



**Figure 3.10** Paramètres d'intérêt pour le calcul de débit

Alors la quantité de $B$ transportée par la masse en mouvement traversant $A$ durant $\Delta t$ est :

$$\delta B = b\ \delta m = b\rho\ \delta V$$

Où $\delta V$ correspond au volume occupé par $\delta m$. Puisque le prisme est de longueur $v\ \Delta t$, il s'ensuit qu'on a :

$$\delta B = b\rho v A\ \Delta t$$

$$\dot{B} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta B}{\Delta t} = b\rho v A \tag{3-6}$$

Ce résultat est toutefois incomplet. Pour une part, il ne rend pas compte du fait que la surface $A$ peut elle-même être en mouvement. Dans cette éventualité, la vitesse $v$ dans l'expression (3-6) doit être remplacée par la vitesse *relative* de l'écoulement par rapport à la surface. En effet, par exemple, si la surface $A$ se déplace à la vitesse de l'écoulement, elle ne sera traversée par aucune matière et les débits seront nuls. D'autre part, on observe que c'est la composante normale de la vitesse relative qui participe au transport de masse à travers la surface (voyez la figure 3.11).

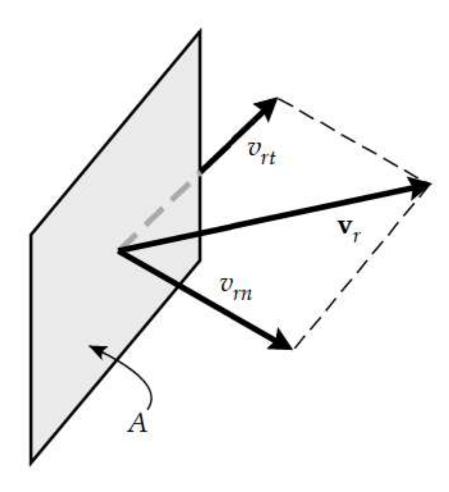



**Figure 3.11** La composante tangentielle de la vitesse relative ($v_{rt}$) ne contribue pas au transport de masse à travers $A$.

L'équation (3-6) devient alors :

$$\dot{B} = b\rho v_{rn} A \tag{3-7}$$

où $v_{rn}$ : composante normale de la vitesse relative de l'écoulement.

La plupart des situations que nous rencontrerons seront telles que nous emploierons (3-7). Finalement, si la vitesse, la masse volumique et $b$ ne sont pas uniformes sur la surface $A$, l'équation (3-7) devient (voyez l'annexe):

$$\dot{B} = \int_A b\rho v_{rn} \, dA \tag{3-8}$$

## 3.7 ANNEXE Formule générale du calcul du débit de *B*

Nous nous proposons ici d'établir la formule générale pour le calcul du débit de *B*.

Considérez la figure 3.12. Le volume de contrôle est délimité par le trait pointillé. Comme c'est l'usage, on définit le vecteur élément de surface $d\mathbf{A}$ comme un vecteur normal à la surface localement et de taille infinitésimale $dA$. Puisque l'opération de sommation s'effectuera sur une surface fermée, la convention veut que $d\mathbf{A}$ pointe vers « l'extérieur ». On a aussi représenté les vecteurs vitesse relative et surface en deux points de la surface $A$.

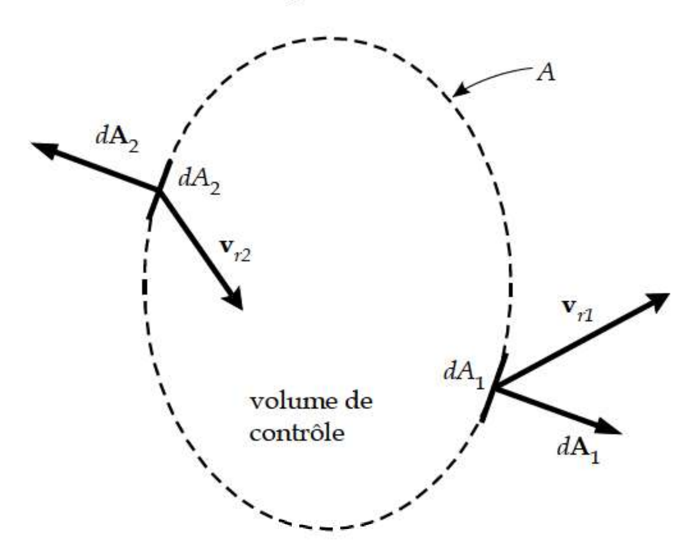



**Figure 3.12** Débits en deux points de la surface délimitant le volume de contrôle

Se référant au résultat (3-7) et si on considère qu'un débit positif correspond à une « sortie » de masse (et de la propriété $B$ associée), on établit que le débit infinitésimal $d\dot{B}$ à travers la surface infinitésimale $dA$ peut s'écrire :

$$d\dot{B} = b\rho v_{rn}\ dA = b\rho\ \mathbf{v} \bullet d\mathbf{A}$$

On observe ainsi que les produits scalaires effectués en $dA_1$ et $dA_2$ donneront lieu à des résultats de signes opposés, en accord avec la convention énoncée précédemment. Alors, le débit net de $B$ à travers les frontières du volume de contrôle devient :

$$\dot{B}_{net} = \oint_A b\rho\ \mathbf{v} \bullet d\mathbf{A} \tag{3-9}$$

Et le théorème du transport peut s'écrire :

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{VC}}{dt} + \oint_A b\rho\ \mathbf{v} \bullet d\mathbf{A} \tag{3-10}$$

# CHAPITRE 4

# LES ÉQUATION DE CONTINUITÉ ET DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

## Table des matières

**4.1 Introduction** **3**

**4.2 Équation de continuité (conservation de la masse)** **3**
4.2.1 Débit massique 4
4.2.2 Écoulement stationnaire 4
4.2.3 Écoulements incompressibles 4
4.2.4 Vitesse moyenne 6

**4.3 Équation de la quantité de mouvement** **7**
4.3.1 Forces agissant sur un système en écoulement 11
4.3.2 Facteur de correction $\beta$ 14

**4.4 Remarques portant sur l'intégrale $\int v\, dA$** **15**

**4.5 EXERCICES** **17**

## 4.1 Introduction

Au chapitre 3, nous nous sommes dotés d'un outil mathématique, le théorème du transport, dont l'objet est de relier les conditions qui prévalent au sein d'un volume de contrôle à l'application des lois physiques à un système.

Le paramètre *B* qui apparaît dans l'expression du théorème du transport désigne, on s'en souvient, toute grandeur physique extensive (proportionnelle à la masse). De façon concrète, les grandeurs physiques qui nous intéresseront seront respectivement la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. Nous serons donc amenés à écrire trois équations fondamentales régissant le comportement des fluides en écoulement : l'équation de continuité, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie. Au chapitre 4, nous établierons les deux premières alors que l'équation d'énergie sera considérée au chapitre 5.

## 4.2 Équation de continuité (conservation de la masse)

Le paramètre B est identifié à la masse. On aura alors :

$$B \rightarrow m$$

et

$$b = \frac{B}{m} \rightarrow 1$$

Le théorème du transport devient alors :

$$\frac{dm_{sys}}{dt} = \frac{dm_{Vc}}{dt} + \sum_{s} \dot{m} - \sum_{e} \dot{m}$$

Or la masse d'un système est (par définition) conservée. Ainsi

$$\frac{dm_{sys}}{dt} = 0$$

et :

$$\boxed{\frac{dm_{VC}}{dt} = \sum_{e} \dot{m} - \sum_{s} \dot{m}} \qquad (4\text{-}1)$$

C'est l'équation de continuité. Elle stipule que le taux de variation de la masse contenue dans le volume de contrôle est donné par la différence entre les débits massiques d'entrée et de sortie.

### 4.2.1 Débit massique

En utilisant l'équation (3-8), on obtient pour le débit massique :

$$\dot{m} = \int_A \rho v_{rn} dA \tag{4-2}$$

Si l'écoulement peut être considéré uniforme sur la section de passage ($\rho = cte$ et $\mathbf{v} = cte$ sur $A$), alors l'expression (4-2) prend la forme simplifiée :

$$\dot{m} = \rho v_{rn} A \tag{4-3}$$

### 4.2.2 Écoulement stationnaire

Le cas d'écoulement stationnaire est particulièrement intéressant puisqu'il se présente souvent en pratique. Dans ce cas, il n'y a pas d'accumulation de masse à l'intérieur du volume de contrôle, c'est-à-dire :

$$\frac{dm_{Vc}}{dt} = 0$$

L'équation de continuité devient donc :

$$\sum_e \dot{m} = \sum_s \dot{m} \tag{4-4}$$

### 4.2.3 Écoulements incompressibles

Si l'écoulement est incompressible (dans le cas de l'écoulement d'un liquide par exemple), l'équation de continuité peut s'exprimer de façon un peu différente. Puisque $\rho = cte$ ,

$$m_{VC} = \rho V_{VC} \qquad \text{et} \qquad \frac{d(\rho V_{VC})}{dt} = \rho \frac{dV_{VC}}{dt}$$

de plus :

$$\dot{m} = \int_A \rho v_{rn} dA = \rho \int v_{rn} dA$$

Définissons le débit volumique $Q$ (en m³/s).

$$Q = \int_A v_m dA$$

Alors : $$\dot{m} = \rho Q$$

Réécrivons l'équation de continuité :

$$\frac{d(\rho V_{VC})}{dt} = \sum_e \rho Q - \sum_s \rho Q$$

$$\cancel{\rho}\frac{d(V_{VC})}{dt} = \cancel{\rho}\sum_e Q - \cancel{\rho}\sum_s Q$$

$$\therefore \quad \frac{dV_{VC}}{dt} = \sum_e Q - \sum_s Q \tag{4-5}$$

De plus, si l'écoulement est stationnaire, $\frac{dV_{VC}}{dt} = 0$ et :

$$\sum_e Q = \sum_s Q \tag{4-6}$$

Les équations (4-5) et (4-6) sont parfaitement équivalentes aux équations (4-1) et (4-4) respectivement, dans les cas d'écoulements incompressibles.

**Exemple 4.1 :** De l'eau s'écoule à travers une conduite circulaire convergente (figure 4.1). Si l'écoulement est stationnaire et peut être considéré uniforme sur les sections de passage, calculez la vitesse de sortie $v_2$.

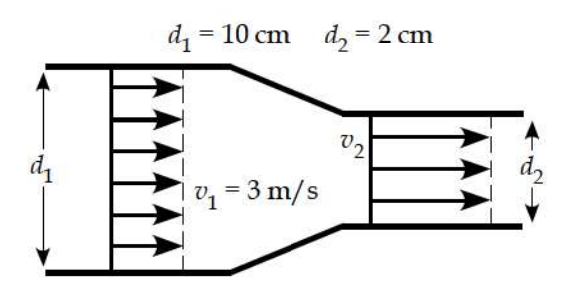



**Figure 4.1** Exemple 4.1

*Solution*

En vertu de l'équation (4-6), on peut écrire :

$$Q_1 = Q_2$$
$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} \; ; \qquad A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}$$

Donc
$$v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 75 \text{ m/s}$$

### 4.2.4 Vitesse moyenne

On définit la vitesse moyenne $\overline{v}$ :

$$\overline{v} = \frac{\int_A v \, dA}{A} \tag{4-7}$$

Or :
$$Q = \int_A v \, dA$$

Il s'ensuit que :
$$Q = \overline{v} A \tag{4-8}$$

**Exemple 4.2** : Un fluide en écoulement à travers une conduite de rayon $R$ présente le profil de vitesse $v(r) = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]$. Dites ce que représente $v_0$ et calculez le débit volumique et la vitesse moyenne si $v_0 = 0{,}5$ m/s, $R$ = 0,2 m et $n$ = 1,5.

*Solution*

*i)* On remarque que $v(0) = v_0$. $v_0$ désigne donc la vitesse au centre de la conduite.

*ii)*
$$Q = \int_A v \, dA = \int_0^R v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right] (2\pi r \, dr)$$

$$Q = 2\pi v_0 \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^{n+2}}{(n+2)R^n} \right]_0^R$$

$$\Rightarrow \qquad Q = \left( \frac{n v_0}{(n+2)} \right) \left( \pi R^2 \right) = \overline{v} A$$

$$\overline{v} = v_0 \left( \frac{n}{n+2} \right)$$

Insérant les valeurs numériques, il vient :

$Q$ = 0,027 m³/s ; $\overline{v} = 0,214$ m/s

## 4.3 Équation de la quantité de mouvement

Un fluide en écoulement exerce des forces sur tout objet qui dévie l'écoulement (un coude dans une conduite, un bec de sortie, une hélice, ...). L'utilisation de l'équation de la quantité de mouvement permet de calculer ces forces. On doit toutefois d'abord établir les forces s'exerçant sur la masse fluide. La deuxième loi de Newton dans sa forme générale s'écrit :

$$\sum \mathbf{F}_{sys} = \frac{d(m\mathbf{v})_{sys}}{dt}$$

où $\sum \mathbf{F}_{sys}$ désigne la force résultante agissant sur le système et le produit $m\mathbf{v}$ constitue sa quantité de mouvement.

Si le système considéré est une masse fluide en écoulement, alors l'utilisation du théorème du transport s'impose. En identifiant :

$$B \rightarrow m\mathbf{v}$$

$$\text{et} \qquad b = \frac{B}{m} \rightarrow \mathbf{v}$$

Alors :

$$\sum \mathbf{F}_{sys} = \frac{d(m\mathbf{v})_{sys}}{dt} == \frac{d(m\mathbf{v})_{VC}}{dt} + \sum_s (\dot{m}\mathbf{v}) - \sum_e (\dot{m}\mathbf{v}) \qquad (4\text{-}9)$$

La grandeur $(\dot{m\mathbf{v}})$ (débit de quantité de mouvement) se calcule à l'aide de l'équation (3-8).

$$(\dot{m\mathbf{v}}) = \int_A \rho \mathbf{v} v_{rn} dA \tag{4-10}$$

Ce calcul peut en général être assez laborieux. Nous ne considérerons donc que les cas pour lesquels la vitesse d'écoulement **v** est uniforme sur les sections de passage. Puisque $\mathbf{v} = cte$ sur $A$,

$$(\dot{m\mathbf{v}}) = \mathbf{v} \int \rho v_{rn} dA = \dot{m}\mathbf{v}$$

Ainsi, dans ce cas particulier le débit de quantité de mouvement est simplement donné par le produit du débit massique et de la vitesse. Sous ces conditions l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\boxed{\sum \mathbf{F}_{sys} = \frac{d(m\mathbf{v})_{VC}}{dt} + \sum_s \dot{m}\mathbf{v} - \sum_e \dot{m}\mathbf{v}} \tag{4-11}$$

À ce stade, quatre remarques s'imposent.

a) La force résultante dont il est question aux équations (4-9) et (4-11) est la force résultante agissant sur le **fluide** contenu dans le volume de contrôle.

b) Les équations (4-9) et (4-11) sont des équations vectorielles. De ce fait, l'équation (4-11), par exemple, représente trois équations scalaires, une pour chaque direction de l'espace. Ainsi, pour la composante en $x$ :

$$\sum F_{sys\,x} = \frac{d(mv_x)}{dt} + \sum_s \dot{m}v_x - \sum_e \dot{m}v_x$$

c) Deux vitesses interviennent dans le calcul spécifié par (4-11) et elles ne réfèrent pas, en général à la même grandeur physique. La vitesse d'écoulement **v** est une quantité vectorelle et, de plus, elle est mesurée par rapport à un référentiel inertiel (se déplaçant à vitesse constante). Quant à $v_{rn}$ qui est utilisée dans le calcul du débit massique, rappelons qu'elle ne correspond qu'à la composante normale de la vitesse relative du fluide. Elle est donc mesurée par rapport à la surface de passage (qui peut être accélérée, entre autres).

**Exemple 4.3**: Soit une plaque de 0,01 m² se déplaçant en direction des x positifs à 4 m/s. De l'eau s'écoulant dans la même direction à 10 m/s frappe la plaque. Calculez $\dot{m}\mathbf{v}$.

*Solution*

$$v_{rn} = 6 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho v_{rn} A = (1000)(6)(0{,}01) = 60 \text{ kg/s}$$

**v** mesurée par rapport au sol : $\mathbf{v} = 10\mathbf{i}$ m/s

$$\Rightarrow \dot{m}\mathbf{v} = 600\mathbf{i} \text{ N}$$

d) La quantité $\dfrac{d(m\mathbf{v})_{VC}}{dt}$ représente le taux de variation de la quantité de mouvement du <u>volume de contrôle</u>. On remarque que :

$$\frac{d(m\mathbf{v})_{VC}}{dt} = \mathbf{v}_{VC}\frac{dm_{VC}}{dt} + m_{VC}\frac{d\mathbf{v}_{VC}}{dt}$$

Ainsi, ce terme sera non-nul si l'une ou l'autre de deux conditions est satisfaite:

1) l'écoulement est non-stationnaire $\left(\dfrac{dm_{VC}}{dt} \neq 0\right)$

2) le centre de masse du volume de contrôle est accéléré.

Remarquons qu'un volume de contrôle en rotation (même à vitesse angulaire constante) est accéléré, de sorte que $\dfrac{d\mathbf{v}_{VC}}{dt} \neq 0$.

Les considérations qui précèdent vont souvent conditionner le choix de volume de contrôle.

**Exemple 4.4**: Une plaque déviatrice se déplace à la vitesse constante $U$ vers la droite. Un jet de vitesse $v$ est dévié sans frottement par la plaque. Si on s'intéresse à la force exercée par le jet sur la plaque déviatrice, quel serait un choix judicieux de volume de contrôle?

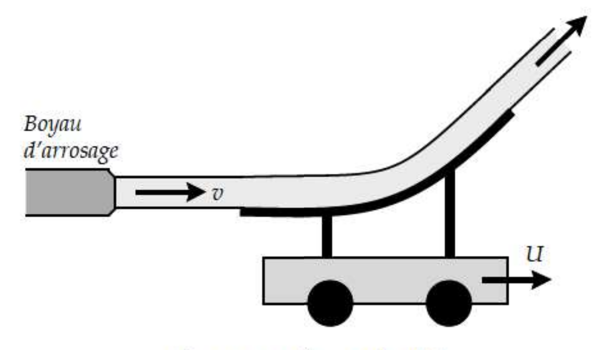



**Figure 4.2** Exemple 4.4

*Solution*

Deux choix (entre autres) sont envisageables pour le volume de contrôle. Ils sont illustrés aux figures 4.3 a) et 4.3 b)

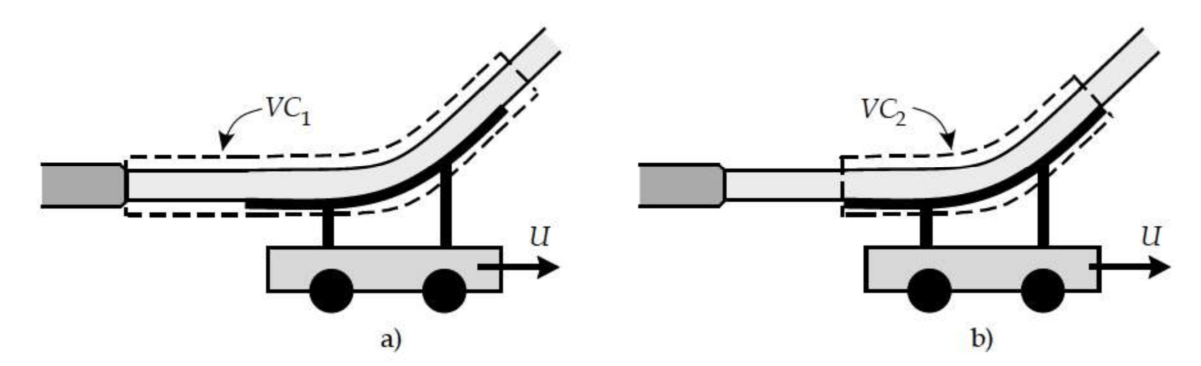


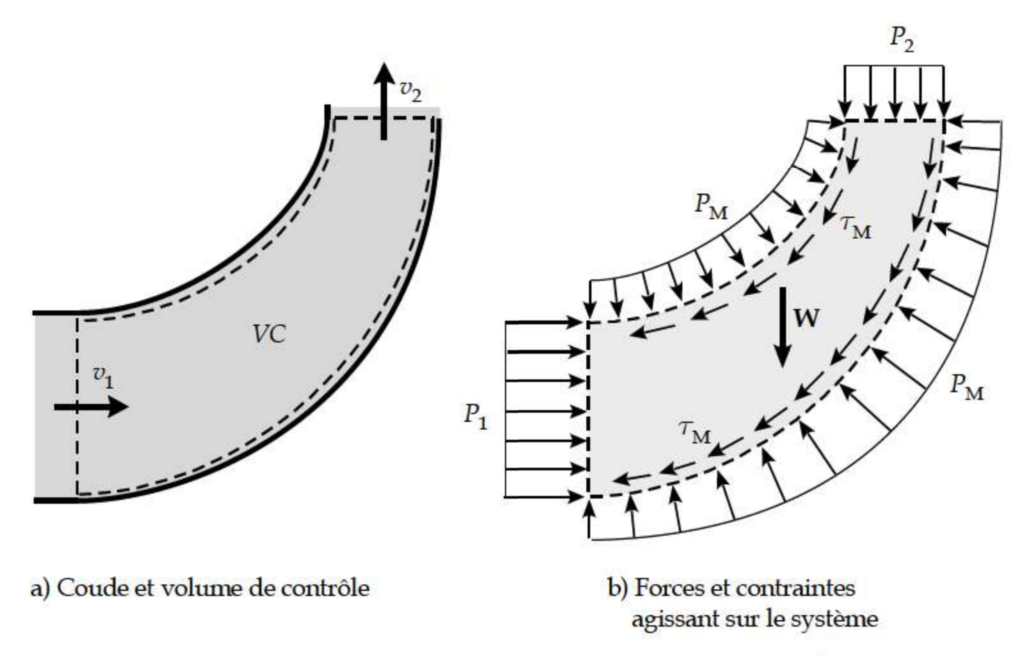

**Figure 4. 3** Choix possibles pour le volume de contrôle de l'exemple 4.4

Le $VC_1$ est un volume de contrôle tout à fait acceptable. Toutefois, comme il s'agrandit dans le temps, la masse qu'il contient va en augmentant c'est-à-dire $\frac{dm}{dt} \neq 0$. On doit donc conserver le terme $\frac{d(m\mathbf{v})_{VC}}{dt}$ dans l'équation.

Le $VC_2$, quant à lui, est confiné aux dimensions de la plaque déviatrice. Comme il n'y a pas d'accumulation de masse (d'eau) sur la plaque, on aura $\frac{dm}{dt} = 0$. Puisque d'autre part il se déplace (par hypothèse) à vitesse constante, $\frac{d\mathbf{v}_{VC}}{dt} = 0$. On peut alors s'affranchir du terme $\frac{d(m\mathbf{v})_{VC}}{dt}$ dans l'équation. C'est donc $VC_2$ qui sera retenu comme volume de contrôle puisqu'il conduit à un calcul plus simple.

### 4.3.1 Forces agissant sur un système en écoulement

Considérons un fluide en écoulement à travers un coude.




a) Coude et volume de contrôle

b) Forces et contraintes agissant sur le système

**Figure 4.4** Les forces agissant sur un système en écoulement

Le système est constitué de la masse à l'intérieur du volume de contrôle (figure 4.4 a)). Les forces et contraintes agissant sur le système apparaissent à la figure 4.4 b). La force résultante sera alors donnée par la somme des forces de poids, de cisaillement et de pression. Ce calcul est plutôt laborieux, en général. La paroi exerce une pression $P_M$ et du cisaillement $\tau_M$ sur les pourtours du système; on choisit de regrouper l'emsemble de ces forces et on désigne cette force résultante par $\mathbf{F}_M$. On regroupe aussi l'ensemble des forces dues à la pression aux entrées et sorties : $\mathbf{F}_p$. Si le poids est représenté par $\mathbf{W}$, alors la force résultante peut s'écrire :

$$\sum \mathbf{F}_{sys} = \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_p + \mathbf{W} \qquad (4\text{-}12)$$

*Notes sur le calcul de* $\mathbf{F}_p$ *et* $\mathbf{F}_M$ .

Dans le calcul de $\mathbf{F}_p$ et $\mathbf{F}_M$ intervient en général la pression absolue. Mais l'ensemble du système et de la conduite est souvent plongé dans un fluide de pression uniforme $P_{ext}$. Évidemment dans ce cas, la force résultante due à $P_{ext}$ s'exerçant sur le système s'annulle. Il est donc approprié dans cas de désigner $\mathbf{F}_p$ et $\mathbf{F}_M$ comme les forces nettes (faisant abstraction de l'action de $P_{ext}$) dues à la pression aux entrées et sorties, et à la paroi agissant sur le système. On utilisera donc lors de leur calcul la pression relative plutôt que la pression absolue.

Souvent on s'intéresse à la force **R** exercée par le fluide sur la paroi. De la troisième loi de Newton on a :

$$\mathbf{R} = -\mathbf{F}_M \tag{4-13}$$

En résumé :
- $\mathbf{W}$ : poids du système
- $\mathbf{F}_P$ : force nette due à la pression aux entrées et sorties
- $\mathbf{F}_M$ : force nette exercée par la paroi sur le système
- $\mathbf{R}$ : force nette exercée par le système (fluide) sur la paroi

**Exemple 4.5 :** La boîte de la figure 4.5 comporte 2 entrées et une sortie. Calculez la force que l'eau en écoulement exerce sur celle-ci (négligez le poids).

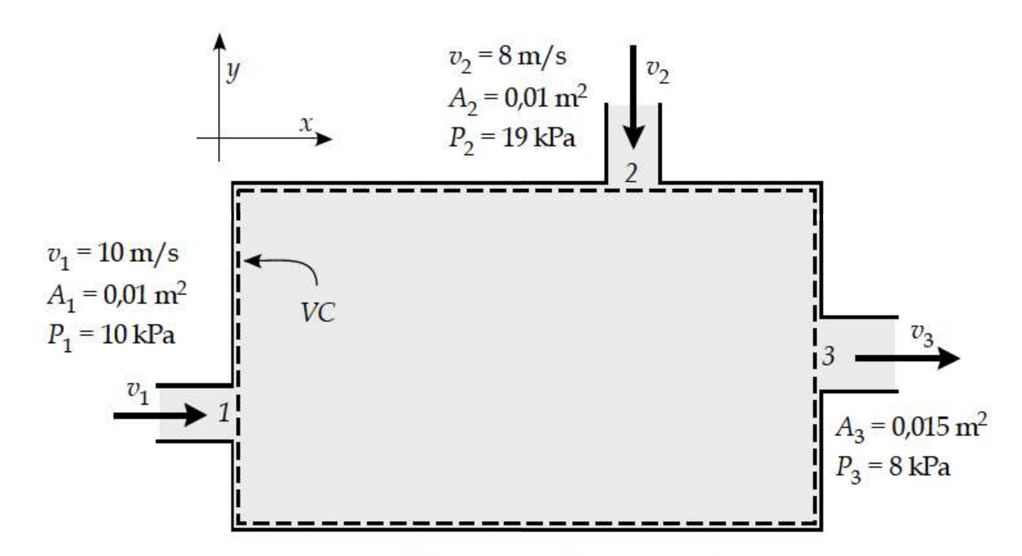



**Figure 4.5** Figure de l'exemple 4.5

*Solution*

*i) Calcul de* $v_3$ :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$v_3 = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{A_3} = 12 \text{ m/s}$$

*ii) Calcul de* **R** :

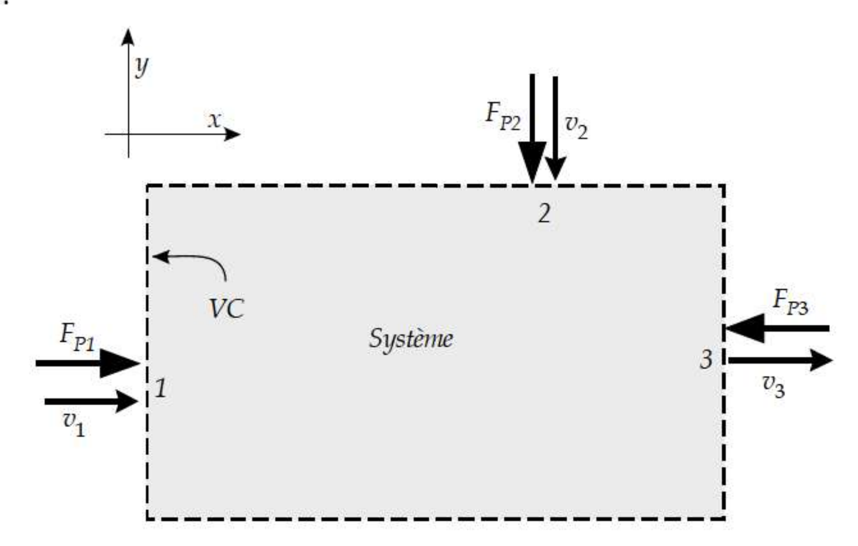



**Figure 4.6** : Forces et vitesses pour l'exemple 4.5

$\mathbf{v}_1 = 10\mathbf{i}$ m/s $\qquad \dot{m}_1 = \rho Q_1 = 100$ kg/s

$\mathbf{v}_2 = -8\mathbf{j}$ m/s $\qquad \dot{m}_2 = \rho Q_2 = 80$ kg/s

$\mathbf{v}_3 = 12\mathbf{i}$ m/s $\qquad \dot{m}_3 = \rho Q_3 = 180$ kg/s

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F}_{sys} &= \sum_s \dot{m}\mathbf{v} - \sum_e \dot{m}\mathbf{v} \\ &= \left[(\dot{m}_3\mathbf{v}_3) - (\dot{m}_1\mathbf{v}_1 + \dot{m}_2\mathbf{v}_2)\right] \\ &= \left[(180)(12\mathbf{i}) - \left((100)(10\mathbf{i}) + (80)(-8\mathbf{j})\right)\right] \\ &= (1160\mathbf{i} + 640\mathbf{j})\ \text{N}\end{aligned}$$

De plus : $$\sum \mathbf{F}_{sys} = \mathbf{F}_P - \mathbf{R}$$

$$\mathbf{F}_P = \mathbf{F}_{P1} + \mathbf{F}_{P2} + \mathbf{F}_{P3}$$

$$\mathbf{F}_{P1} = \mathrm{P}_1 A_1 \mathbf{i} = 100\mathbf{i}\ \text{N}; \quad \mathbf{F}_{P2} = -\mathrm{P}_2 A_2 \mathbf{j} = -190\mathbf{j}\ \text{N}; \quad \mathbf{F}_{P3} = -\mathrm{P}_3 A_3 \mathbf{i} = -120\mathbf{i}\ \text{N}$$

$$\mathbf{F}_P = (-20\mathbf{i} - 190\mathbf{j})\ \text{N}$$

$$\mathbf{R} = -\sum \mathbf{F}_{sys} + \mathbf{F}_P = (-1180\mathbf{i} - 830\mathbf{j})\ \text{N}$$

*Remarque*

On observe dans le cas de l'exemple qui précède, que puisque

$$\sum \mathbf{F}_{sys} = \sum_s \dot{m}\mathbf{v} - \sum_e \dot{m}\mathbf{v}$$

et que les vitesses ne présentent que des composantes dans le plan horizontal (rappelons que la coordonnée $z$ est associée à la direction verticale), il s'ensuit que $\sum \mathbf{F}_{sys}$ ne présente elle-même que des composantes dans le plan horizontal. Ce qui précède s'applique aussi à $\mathbf{F}_P$. Puisque, par ailleurs,

$$\mathbf{R} = -\sum \mathbf{F}_{sys} + \mathbf{F}_P + \mathbf{W} \, ,$$

il vient :

$$R_z = -W \; .$$

Si on s'intéresse uniquement à la contribution à **R** qui est due à l'écoulement (contribution dynamique), on constate qu'il est inutile de considérer le poids dans les calculs. Nous conviendrons donc pour la suite que si la déviation de l'écoulement s'effectue dans le plan horizontal, l'effet du poids sera négligé.

### 4.3.2 Facteur de correction $\beta$

Dans bien des situations pratiques la vitesse à une sortie ou une entrée est orientée selon l'axe de celle-ci mais ne peut être considérée uniforme sur la section de passage. On doit donc en général utiliser l'équation (4-10) pour calculer le débit de quantité de mouvement. Pour simplifier le traitement, on peut choisir de réécrire l'équation(4-10) de la façon suivante :

$$\left(\dot{m\mathbf{v}}\right) = \int_A \rho \mathbf{v} \; v_{rn} \, dA = \beta \rho v_{rn} \overline{\mathbf{v}} \tag{4-14}$$

où $\overline{\mathbf{v}}$ est la vitesse moyenne et $\beta$ un facteur de correction défini par :

$$\beta = \frac{\int_A v^2 \; dA}{\overline{v}^2 A} \tag{4-15}$$

Les équations(4-9) et (4-11) deviendront alors :

$$\sum \mathbf{F}_{sys} = \frac{d\left(m\mathbf{v}\right)_{vc}}{dt} + \sum_s \dot{m}\beta \overline{\mathbf{v}} - \sum_e \dot{m}\beta \overline{\mathbf{v}} \tag{4-16}$$

## 4.4 Remarques portant sur l'intégrale $\int v \, dA$

En général, l'évaluation de cette intégrale requiert que l'on emploie les méthodes couvertes dans le cadre d'un cours de calcul à plusieurs variables. Toutefois, les exemples et exercices du texte sont tous d'un de deux types : l'écoulement s'effectue entre deux très grandes surfaces planes ou à travers une conduite circuliare.

*i) Plaques parallèles*

Si l'écoulement s'effectue entre deux plaques de grandes dimensions alors que l'espacement $h$ entre celles-ci est petit, on peut assimiler la situation à un écoulement entre deux surfaces planes infinies (négligeant les effets de bord). La vitesse ne devient alors fonction que de la coordonnée $y$ (figure 4.7).

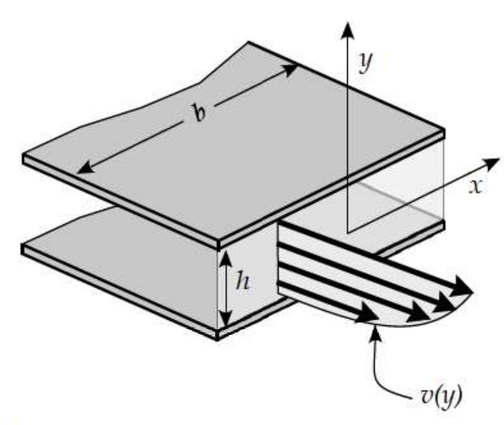



**Figure 4.7** Écoulement entre deux plaques de grandes dimensions

L'intégrale qui a priori s'écrit : $\int_A v \, dA = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{x_{min}}^{x_{max}} v(x,y) \, dx \, dy$

prends la forme plus simple :

$$= \int_{-b/2}^{+b/2} dx \int_{y_{min}}^{y_{max}} v(y) \, dy = \int_{y_{min}}^{y_{max}} b \, v(y) \, dy \quad .$$

Or la quantité $dA' = b \, dy$ correspond à la surface infinitésimale du rectangle de largeur $b$ et de hauteur $dy$ (figure 4.8).

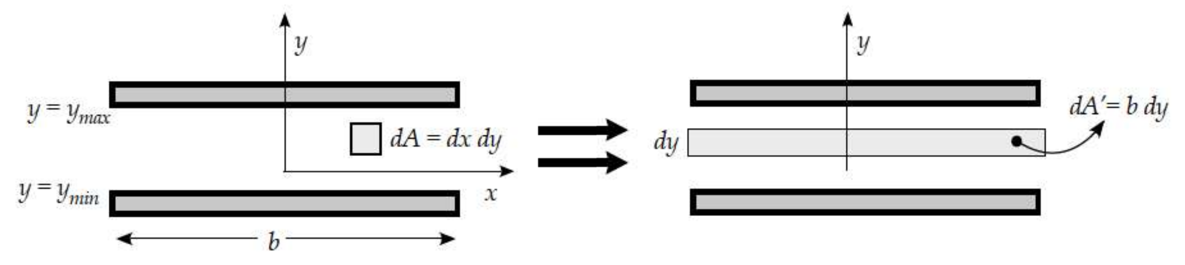



**Figure 4.8** Simplification de l'intégrale à deux variables en une intégrale à une variable

On observe que l'intégrale à deux variables se transforme en une intégrale selon une dimension seulement : la coordonnée $y$. On écrira donc :

$$\int_A v\, dA = \int_{y_{min}}^{y_{max}} v(y)\, dA' \qquad \text{avec } dA' = b\, dy\,.$$

*ii) Conduite circulaire*

Nous avons déjà décrit comment la symétrie de la conduite imposait un profil de vitesse ne dépendant que de la distance radiale $r$ (voyez la discussion accompagnant la figure 1.9 de la section 1.2.3). Ainsi, $v = v(r)$ .

L'intégrale qui a priori s'écrit : $\int_A v\, dA = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} v(r,\theta)\, rdr\, d\theta$

prends donc la forme plus simple :

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_{min}}^{r_{max}} v(r)\, rdr = \int_{r_{min}}^{r_{max}} 2\pi r\, v(r)\, dr \quad .$$

Or la quantité $dA' = 2\pi r\, dr$ correspond à la surface infinitésimale de la bande circulaire de rayon $r$ et de largeur $dr$ (figure 4.9).

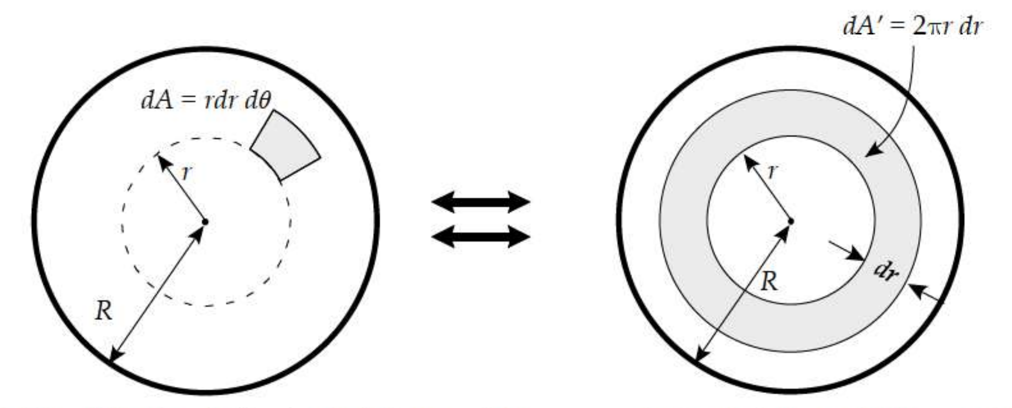



**Figure 4.9** Simplification de l'intégrale à deux variables en une intégrale à une variable; symétrie radiale

On écrira donc :

$$\int_A v\, dA = \int_{r_{min}}^{r_{max}} v(r)\, dA' \qquad \text{avec } dA' = 2\pi r\, dr\,.$$

## 4.5 EXERCICES

**Problème 1** De l'eau de pluie s'écoule sur une rue inclinée décrivant ainsi un écoulement en régime permanent (figure P 4.1). Une feuille de papier à la surface se déplace à la vitesse de 0.5 m/s. La section de passage de l'écoulement a une largeur de 2 m et une hauteur $h$ = 1 cm. Calculez le débit volumique de l'écoulement pour les profils de vitesse suivants (la variable $y$ exprime l'éloignement par rapport à la surface solide) :

a) $v(y) = U$ ; b) $v(y) = U\left(\frac{y}{h}\right)$ ; c) $v(y) = U\left(2\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right)$

où $y$ est la coordonnée perpendiculaire aux lignes de courant

Rép. :a) $Q$ = 0,01 m³/s; b) $Q$ = 0,005 m³/s; c) $Q$ = 0,0067 m³/s;

**Problème 2** De l'air de masse volumique $\rho$ = 1,2 kg/m³ est aspiré à 6 m/s vers un compresseur à travers une conduite de 20 cm de diamètre. L'air quitte le compresseur à la vitesse de 3 m/s à travers une conduite de 10 cm de diamètre. Calculez la masse volumique de l'air à la sortie.

Rép. : $\rho$ = 9,6 kg/m³

**Problème 3** De l'eau s'écoule à une vitesse uniforme de 3 m/s dans une conduite *AB* de 1,2 m de diamètre reliée à une conduite *BC* de 1,5 m de diamètre. Au point *C* la conduite se sépare en deux parties. La première, *CD* a un diamètre de 0,8 m et transporte le tiers de l'écoulement total. La vitesse dans la seconde *CE* est 2,5 m/s (voyez la figure P 4.3). Calculez :

a) le débit volumique dans la section *AB*

b) la vitesse dans la section *BC*

c) la vitesse dans la section *CD*

d) le diamètre de la section *CE*

Rép. : a) $Q_{AB}$ = 3,393 m³/s; b) $v_{BC}$ = 1,92 m/s; c) $v_{CD}$ = 2,25 m/s; d) $d_{CE}$ = 1,073 m

**Problème 4** Lors d'un essai d'écoulement dans une conduite cylindrique de 2 m de diamètre, on a constaté que la vitesse de l'écoulement était nulle à la paroi et égale à 6 m/s à l'axe central, pour un débit volumique de 10 m³/s. Le profil de vitesse obéit à la relation :

$$v(r) = C\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right)$$

où $r$ désigne la position radiale et $R$, le rayon de la conduite. Déterminez la valeur numérique et les unités des constantes $C$ et $n$.

Rép. : $C_1$ = 6 m/s; $n$ = 2,26

**Problème 5** Un profil de vitesse usuel pour les écoulements turbulents est donné par l'expression suivante :

$$v(r) = V_{\max}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$$

où $V_{\max}$ est la vitesse maximale et $R$ le rayon de la conduite. Calculez le rapport entre $\overline{v}$ , la vitesse moyenne, et $V_{\max}$ en fonction de $n$.

Rép. : $\dfrac{\overline{v}}{V_{\max}} = \dfrac{2n^2}{(1+n)(2n+1)}$

**Problème 6** Un réservoir s'alimente en eau par deux entrées *1* et *2* (figure P 4.6). Le diamètre et la vitesse de l'écoulement à l'entrée *1* sont respectivement 10 cm et 5 m/s et le débit volumique en *2* est $Q_2$ = 0,03 m³/s.

a) Quelle est la vitesse $v_3$ à la sortie si le diamètre $d_3$ = 15 cm et si la hauteur d'eau $h$ dans le réservoir se maintient constante ?

b) Si à $t$ = 0 la vitesse de l'écoulement $v_3$ à la sortie est augmentée à 5 m/s, à quelle vitesse le niveau du réservoir va-t-il baisser? Quelle masse d'eau le réservoir aura-t-il perdue au bout de 5 secondes si le diamètre du réservoir est de 60 cm?

Rép. : a) $v_3$ = 3,92 m/s

b) $v_{niveau}$ = -0,0676 m/s; m = 95,5 kg

**Problème 7** Une conduite circulaire de diamètre $d_A$ amène de l'eau à un dispositif constitué de deux disques espacés de $h$ et de rayons $R$ qui produisent un écoulement de sortie s'effectuant de façon radiale (figure P 4.7). Si la vitesse moyenne de l'eau dans la conduite est $\overline{v}_A$, établissez la vitesse moyenne $\overline{v}_B$ (vitesse radiale)

a) à la distance $r$ en fonction des paramètres mentionnés;

b) à $r$ = 150 mm et à la sortie des disques sachant que $d_A$ = 50 mm, $h$ = 10 mm, $R$ = 300 mm et $\overline{v}_A = 10$ m/s

Rép. : a) $\overline{v}_B(r) = \dfrac{\overline{v}_A d_A^{\,2}}{8hr}$

b) $\overline{v}_B(r = 150 \text{ mm}) = 2{,}083 \text{ m/s}$ ; $\overline{v}_B(r = 300 \text{ mm}) = 1{,}042 \text{ m/s}$

**Problème 8** Une entrée d'eau de débit 0,1 $m^3/s$ et une entrée d'alcool ($\sigma$ = 0,8) de débit 0,3 $m^3/s$ sont mélangées dans une conduite en Y. Quelle est la masse volumique du mélange à la sortie si les fluides sont considérés idéaux ?

Rép. : $\rho$ = 850 $kg/m^3$

**Problème 9** De l'huile s'écoule à travers une conduite circulaire en régime laminaire suivant le profil de vitesse :

$$v(r) = \left(0{,}6 - 15r^2\right) \text{ m/s}$$

Calculez : a) le débit volumique

b) la vitesse moyenne

c) le facteur de correction sur la vitesse

Rép. : a) $Q$ = 0,0377 $m^3/s$ ; b) $\overline{v} = 0{,}3$ m/s ; c) $\beta$ = 4/3

**Note : Pour les exercices qui suivent, les écoulements sont considérés uniformes sur les sections de passage.**

**Problème 10** Un jet d'eau sort d'un bec de sortie à la vitesse de 30 m/s. Si la pression dans la conduite est de 500 kPa (figure P 4.10). Calculez :

a) le débit volumique

b) la réaction du jet sur le bec de sortie

Rép. : a) $Q = 0{,}0147$ m³/s ; b) $\mathbf{R} = 24{,}1\mathbf{i}$ kN

**Problème 11** Une plaque est soumise à l'impact direct d'un jet d'eau de 50 mm de diamètre s'écoulant à la vitesse de 18 m/s (figure P 4.11). La plaque dévie le jet de façon radiale; toutes les vitesses de sortie sont présumées de même grandeur. Calculez la force exercée sur la plaque

a) si elle est au repos ;

b) si elle se déplace dans le sens du jet à la vitesse de 6 m/s.

Rep. : a) $\mathbf{R} = 636{,}2\mathbf{i}$ N; b) $\mathbf{R} = 282{,}7\mathbf{i}$ N

**Problème 12** Un coude horizontal fait dévier un écoulement d'eau de $180^0$ (figure P 4.12). La pression et la vitesse à l'entrée sont, respectivement, de 100 kPa et 2 m/s alors qu'à la sortie, l'eau est à la pression atmosphérique. Déterminez la force nécessaire pour maintenir le coude en place.

Rép. : $\mathbf{F} = -8345\mathbf{i}$ N

**Problème 13** Un jet d'eau s'écoulant dans l'air est dévié par une surface courbe (figure P 4.13). Si le débit massique vaut 0,8 kg/s et qu'on néglige le poids, calculez la force du jet sur cette surface.

Rép. : $\mathbf{R} = (14\mathbf{i} - 17{,}3\mathbf{j})$ N

**Problème 14** Un coude horizontal fait dévier un écoulement de 45° dans le plan horizontal (figure P 4.14). Les diamètres et les pressions sont respectivement de 500 mm et 40 kPa à l'entrée et de 250 mm et 23 kPa à la sortie. Calculez la force exercée par le fluide ($\rho$ = 850 kg/m³) sur la conduite pour un débit de 0,45 m³/s.

$$\text{Rép. : } \mathbf{R} = \left(5453\mathbf{i} - 3278\mathbf{j}\right) \text{ N}$$

**Problème 15** Un coude convergeant fait dévier un écoulement dans le plan vertical (figure P 4.15). Le volume occupé par l'eau entre les points *1* et *2* est de 0,2 m³. Sachant que le débit est de 0,4 m³/s et que les pressions à l'entrée et à la sortie sont de 150 kPa et 90 kPa, respectivement, calculez la force exercée par l'eau sur le coude.

$$\text{Rép. : } \mathbf{R} = \left(25{,}72\mathbf{i} + 3{,}638\mathbf{k}\right) \text{ kN}$$

**Problème 16** Un raccord a une section d'admission de 7 dm² et une section de refoulement de 28 dm². Le raccord disposé dans le plan horizontal fait dévier le liquide selon les directions illustrées à la figure P 4.16. Les pressions à l'entrée et à la sortie sont de 40 kPa et de 20 kPa, recpectivement. Le fluide présente une masse volumique de 900 kg/m³ et le débit est de 400 kg/s. Calculez la force qu'exerce le fluide sur le raccord.

$$\text{Rép. : } \mathbf{R} = \left(1507\mathbf{i} - 8069\mathbf{j}\right) \text{ N}$$

**Problème 17** Un fluide ($\rho$ = 800 kg/m³) circule à travers un T de 10 cm de diamètre qui débouche à l'atmosphère (figure P 4.17). Le débit de 0,01 m3/s à l'entrée, se divise également entre les sorties. Sachant que la pression d'entrée est de 100 kPa et si on néglige la gravité, calculez force exercée par l'écoulement sur le T.

Rép. : $\mathbf{R}$ = 795,6$\mathbf{i}$ N

**Problème 18** Dans une installation hydraulique, l'eau débouche à l'atmosphère à travers une conduite horizontale en Y (figure P 4.18). La vitesse des jets aux deux sorties est de 10 m/s et la pression à l'entrée est de 19,4 kPa.

a) Calculez les trois débits.

b) Déterminez la force résultante exercée sur les parois de la conduite.

Rép. :a) $Q_1$ = 0,0888 m³/s ; $Q_2$ = 0,0503 m³/s ; $Q_3$ = 0,0385 m³/s

b) $\mathbf{R} = (288{,}8\mathbf{i} + 82{,}0\mathbf{j})$ N

**Problème 19** Une plaque déviatrice se déplace à la vitesse constante de $U$ vers la droite. Un jet de vitesse absolue $v$ (par rapport au sol) et de section $A$ est dévié sans frottement par la plaque. On présume que l'écoulement garde la même section après avoir été dévié. En fonction des paramètres de la figure P 4.19 et de la masse volumique, exprimez :

a) les composantes horizontale et verticale de la vitesse de sortie $\mathbf{v}_S$ par rapport au sol;

b) les composantes horizontale et verticale de la force exercée par le jet sur la plaque.

Rép. : a) $v_{Sx} = (v-U)\cos\beta + U$ ; $v_{Sz} = (v-U)\sin\beta$

b) $R_x = \rho A(v-U)^2(1-\cos\beta)$ ; $R_z = -\rho A(v-U)^2\sin\beta$

**Problème 20** Un fluide de densité 0,85 s'écoule en régime stationaire comme il est illustré à la figure P 4.20. Toutes les entrées et sorties sont soumises à la pression atmosphérique. Calculez la force nécessaire pour maintenir la boîte en place.

Rép. : $\mathbf{F} = (4183\mathbf{i} + 5717\mathbf{j})$ N

**Problème 21** La vitesse de l'écoulement à travers l'orifice circulaire de 20 cm de diamètre d'un grand réservoir est donnée par $v = \sqrt{2gh}$. Quelle force de frottement doit exercer le sol afin de maintenir le réservoir en place si $h$ = 10 m (figure P 4.21) ?

Rép. : $F_f$ = 6164 N

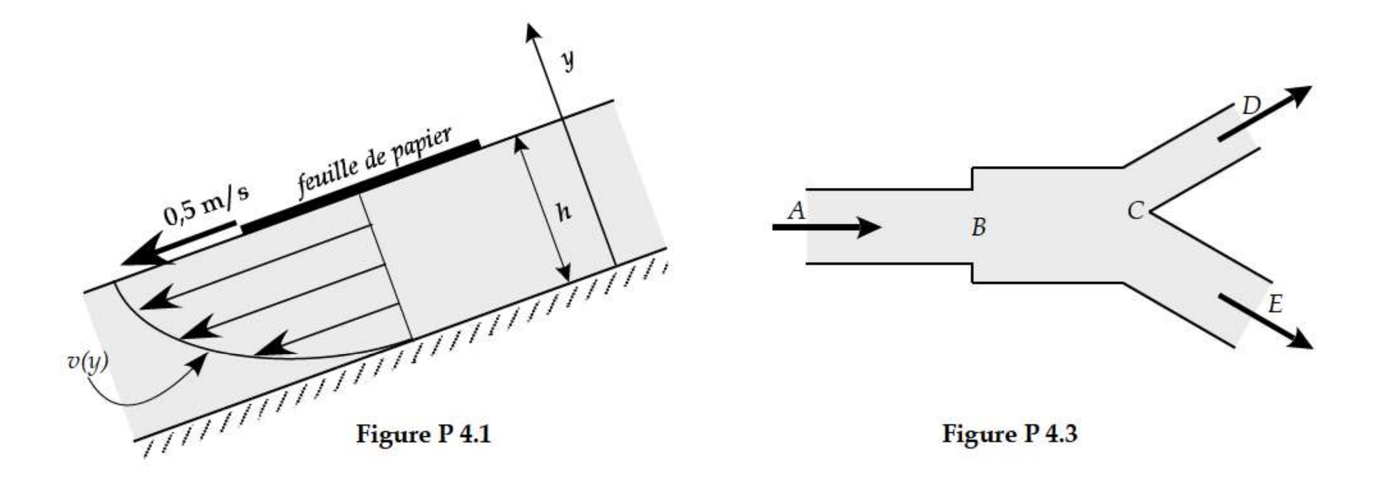



Figure P 4.1

Figure P 4.3

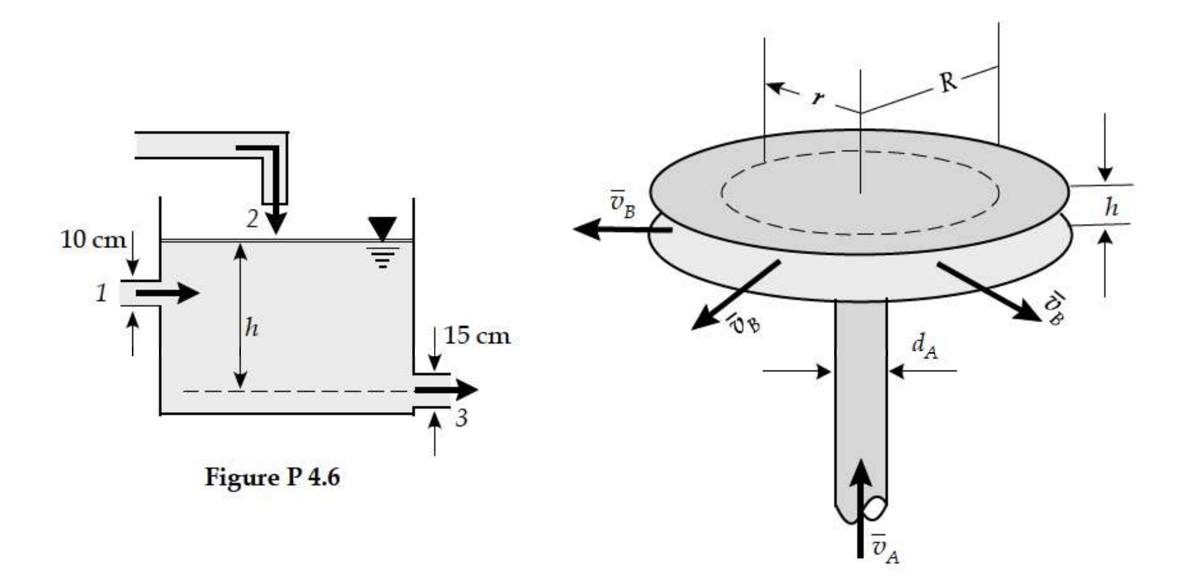



Figure P 4.6

Figure P 4.7

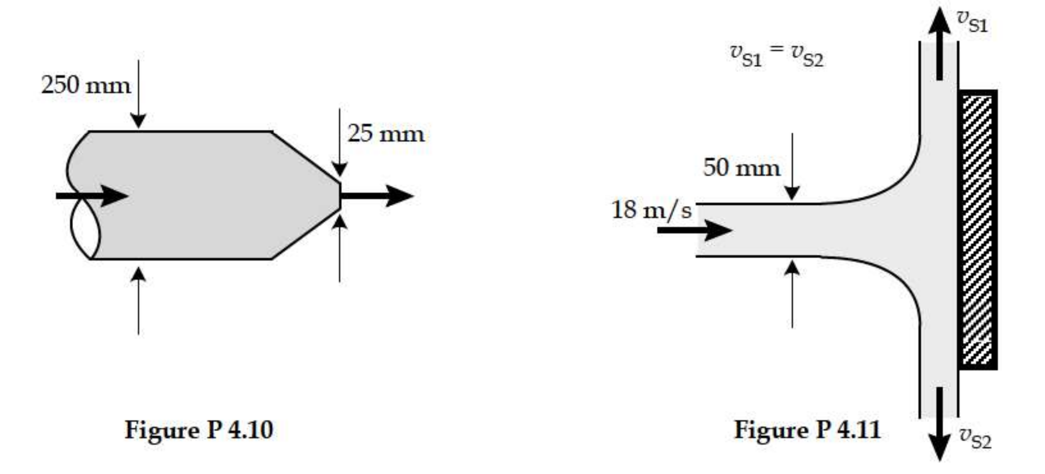



Figure P 4.10

Figure P 4.11

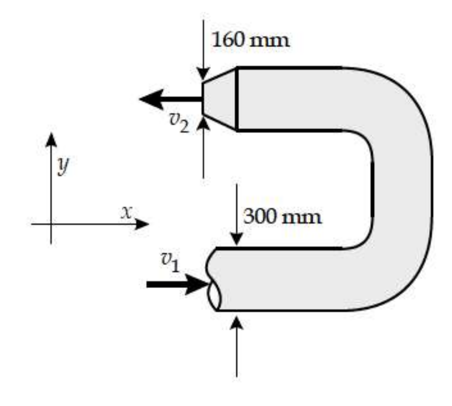




Figure P 4.12

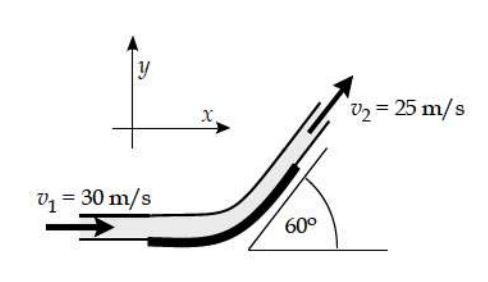



Figure P 4.13

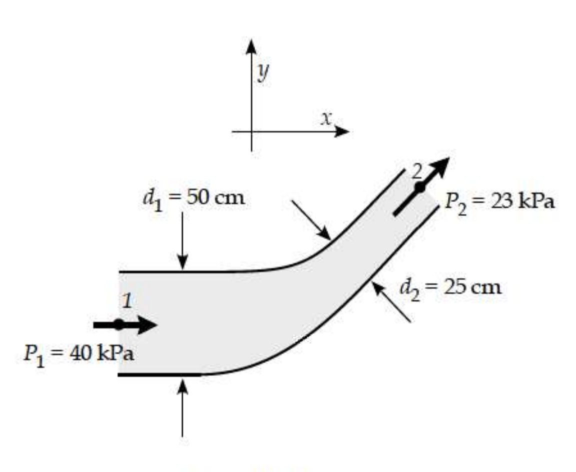



Figure P 4.14

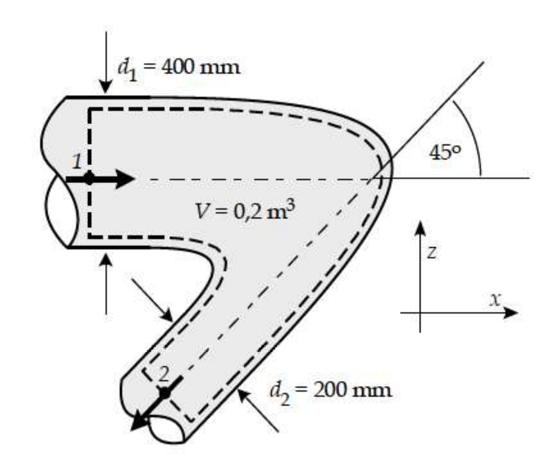



Figure P 4.15

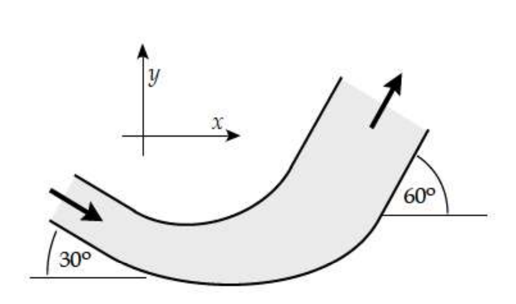



Figure P 4.16

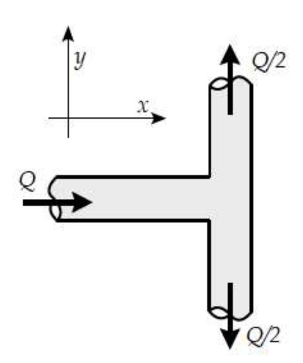



Figure P 4.17

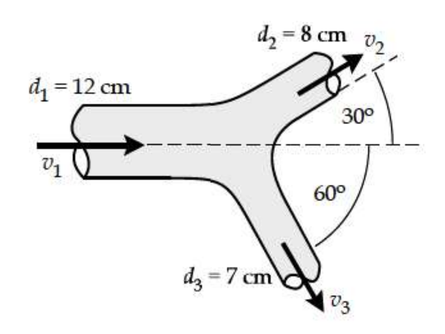



Figure P 4.17

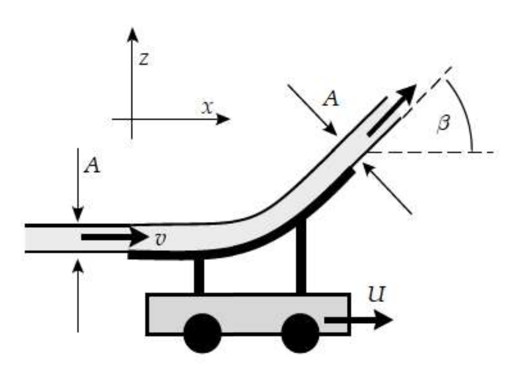



Figure P 4.19

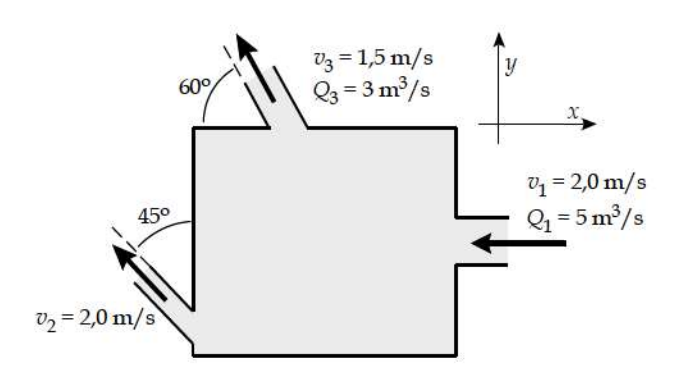



Figure P 4.20

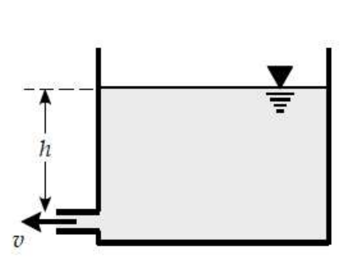



Figure P 4.21

# CHAPITRE 5

# L'ÉQUATION D'ÉNERGIE

Table des matières

| | | |
|---|---|---|
| **5.1** | **Introduction** | **3** |
| **5.2** | **Équation générale de l'énergie** | **3** |
| **5.3** | **Les types de travaux** | **6** |
| **5.4** | **Écoulement stationnaire : équation d'énergie** | **7** |
| **5.5** | **Écoulements incompressibles : hauteur et pertes de charge** | **8** |
| **5.6** | **Équation de Bernoulli** | **10** |
| **5.7** | **Exemples** | **11** |
| **5.8** | **La variation de pression normalement aux lignes de courant** | **15** |
| **5.9** | **EXERCICES** | **19** |

## 5.1 Introduction

Au chapitre précédent, le théorème du transport a été appliqué aux grandeurs physiques de masse et de quantité de mouvement du système. En identifiant l'énergie au paramètre $B$ dans l'expression du théorème du transport nous obtiendrons l'équation générale d'énergie. C'est toutefois la forme que cette équation prend en situation d'écoulement stationnaire qui retiendra notre attention.

## 5.2 Équation générale de l'énergie

Dans l'expression du théorème du transport (équation (3-5)), le paramètre $B$ est identifié à l'énergie.

$$B \rightarrow E$$

et puisque $b = \dfrac{B}{m}$ , il vient : $b \rightarrow e = \dfrac{E}{m}$

où, $e$ : énergie massique du système en J/kg.

On obtient alors :

$$\frac{dE_{sys}}{dt} = \frac{dE_{VC}}{dt} + \sum_{s} \dot{E} - \sum_{e} \dot{E} \tag{5-1}$$

La grandeur $\dot{E}$ représente le débit énergétique c'est-à-dire le flux d'énergie par unité de temps du fait de l'écoulement à travers une entrée ou une sortie du volume de contrôle (J/s ou W). En effet, la matière en écoulement transporte avec elle son énergie et si elle sort du volume de contrôle, ce dernier comportera d'autant moins d'énergie.

En général $\dot{E}$ pour une surface de passage $A$ (entrée ou sortie) est donnée par:

$$\dot{E} = \int_{A} \rho e v_{rn} d\mathrm{A}$$

Toutefois, si l'énergie massique $e$ peut être considérée uniforme sur la surface de passage alors le résultat précédent prend la forme simplifiée suivante :

$$\dot{E} = \int_{\mathrm{A}} e \rho v_{rn} d\mathrm{A} = e \int \rho v_{rn} d\mathrm{A} = \dot{m} e \tag{5-2}$$

*Discussion sur l'énergie totale E*

$E$ , l'énergie totale, représente la somme des énergies potentielle et cinétique de l'ensemble des particules constituant le système. On trouve utile de la traiter comme résultant de la somme de trois termes.

1) $U$ : énergie interne de la substance. Les molécules sont animées d'un mouvement aléatoire (agitation thermique) qui est tout à fait indépendant du fait que le fluide soit en écoulement ou non et auquel on peut associer une énergie cinétique $U_K$. Par ailleurs, les particules de fluide interagissent entre elles par le biais de forces intermoléculaires auxquelles on peut associer une énergie potentielle d'interaction $U_P$. L'énergie interne $U$ correspondra alors à la somme de ces deux quantités $(U = U_P + U_K)$. Pour les fluides incompressibles, $U$ dépend exclusivement de la température de la substance. Une description plus complète de l'énergie interne d'une substance est présentée au chapitre 1 de la partie sur la thermodynamique de cet ouvrage.

2) $\frac{1}{2}mv^2$ : énergie cinétique de l'écoulement. Comme $v$ est la vitesse de l'écoulement, cette grandeur représente l'énergie cinétique associée au fait que le fluide est en écoulement.

3) $mgz$ : énergie potentielle de gravité.

Notons que si la masse se trouvait dans un autre champ de force (que le champ gravitationnel), un champ électromagnétique externe, par exemple, il faudrait ajouter un terme d'énergie potentielle lui correspondant.

Ainsi un bloc de masse $m$ se déplaçant à $v$ m/s et se situant à $z$ m d'élévation sera caractérisé par une énergie totale $E$ valant :

$$E = U + \frac{1}{2}mv^2 + mgz \tag{5-3}$$

Souvent la somme $\frac{1}{2}mv^2 + mgz$ est désignée par le vocable « d'énergie mécanique ».

Donc :

$$e = \frac{E}{m} = u + \frac{v^2}{2} + gz \tag{5-4}$$

où :

$$u = \frac{U}{m} \quad \text{(énergie interne massique)} \tag{5-5}$$

*Premier principe de la thermodynamique*

En vertu du premier principe de la thermodynamique (principe de conservation de l'énergie), le contenu énergétique d'un système ne peut être modifié que par l'apport d'énergie sous forme de travail ou sous forme de chaleur. Les conventions de signe s'appliquant au calcul du travail et de la chaleur sont :

*i)* $W > 0$ si le système fait un travail sur son environnement (énergie sort du système).

*ii)* $Q > 0$ si l'énergie entre dans le système.

La figure 5.1 résume ce qui précède.

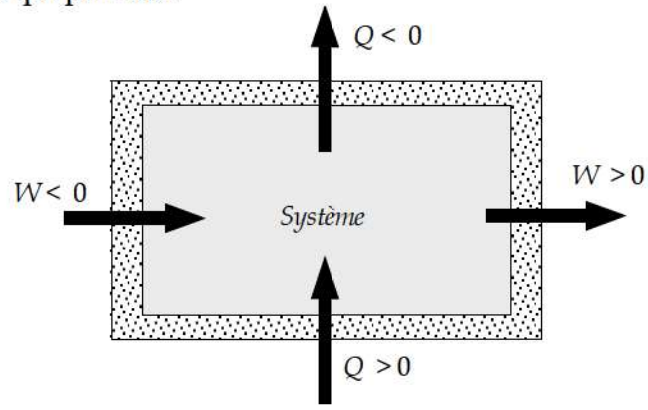



**Figure 5.1** Conventions de signes pour le travail et la chaleur

Le principe de conservation d'énergie pour le système s'écrit alors :

$$E_2 - E_1 = Q_{1-2} - W_{1-2}$$

Dans le cas d'un écoulement, c'est le taux de variation de l'énergie qui nous intéresse :

$$\frac{dE_{sys}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_2 - E_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q}{\Delta t} - \frac{W}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dE_{sys}}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} \qquad (5\text{-}6)$$

$\dot{Q}$ et $\dot{W}$ désignent alors les taux de transfert d'énergie sous forme de chaleur et de travail, respectivement. Le taux de transfert de travail est communément appelé puissance.

En combinant les équations (5-1), (5-2) et (5-6), on obtient l'équation générale d'énergie quand l'énergie massique est uniforme à travers les sections de passage:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE_{VC}}{dt} + \sum_s \dot{m}e - \sum_e \dot{m}e \qquad (5\text{-}7)$$

En situation d'écoulement stationnaire, $\frac{dE_{VC}}{dt} = 0$ . Ainsi l'équation (5-7) prend la forme simplifiée :

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum_s \dot{m}e - \sum_e \dot{m}e$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum_s \dot{m}\left(u + \frac{v^2}{2} + gz\right) - \sum_e \dot{m}\left(u + \frac{v^2}{2} + gz\right) \qquad (5\text{-}8)$$

## 5.3 Les types de travaux

On scinde généralement le travail total $W$ en trois termes, c'est-à-dire qu'on écrit :

$$W = W_\tau + W_{VC} + W_{pression}$$

$W_\tau$ : travail effectué par les forces de frottement visqueux (cisaillement $\tau$) sur les parois du volume de contrôle (*VC*).

$W_{VC} = W_P + W_T$ : travaux effectués par une turbine ($W_T$) et une pompe ($W_P$) regroupés dans le symbole $W_{VC}$. Notons que $W_T > 0$ et $W_P < 0$, par convention.

$W_{pression}$ : travail effectué par les forces de pression aux entrées et sorties du volume de contrôle.

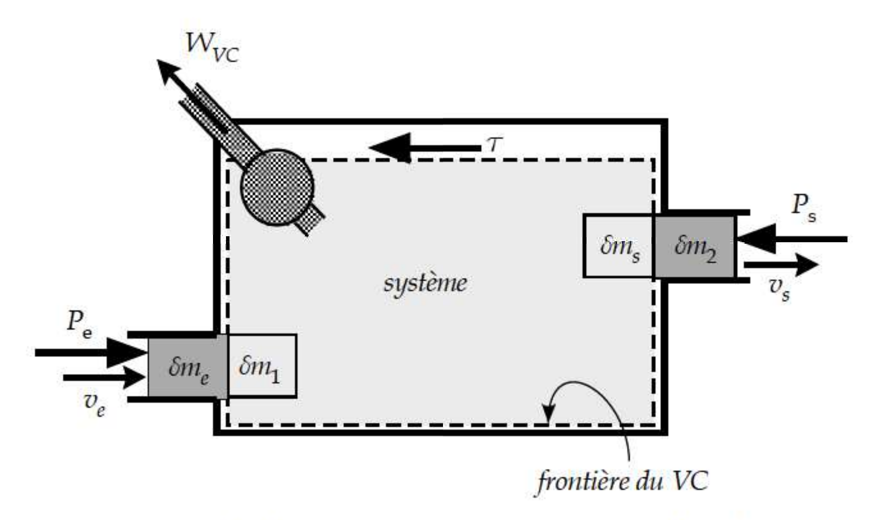



**Figure 5.2** Illustration des « forces » responsables de travaux et du flux de masses aux entrées et sorties du *VC*

*Calcul de* $\dot{W}_{pression}$ :

À la figure 5.2, $\delta m_e$ et $\delta m_s$ représentent les masses qui vont entrer et sortir du volume de contrôle durant $dt$. Or, $\delta m_s$ (qui fait partie du système) doit déplacer $\delta m_2$ afin d'évacuer le *VC* et $\delta m_e$ doit déplacer $\delta m_1$ (qui fait partie du système) pour s'y introduire. Dans chaque cas, une dépense en énergie (un travail) est effectuée.

La figure 5.3 montre un élément de masse $\delta m$ se déplaçant de $dx$ durant $dt$ sous l'action de la pression $P$.

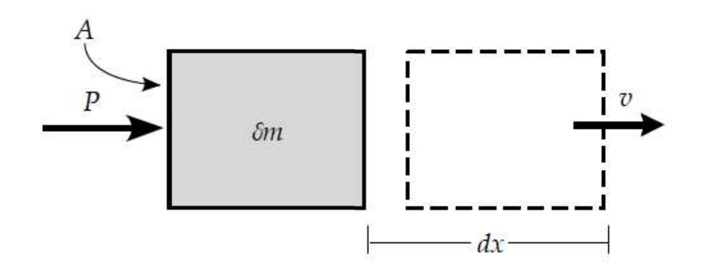



**Figure 5.3** Paramètres intervenant dans le calcul de $\dot{W}_{pression}$

Le travail infinitésimal effectué par la pression $\delta W_{pression}$ est alors :

$$\delta W_{pression} = F_{pression} dx = PAdx$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{W}_{pression} = \frac{\delta W_{pression}}{dt} = PA\frac{dx}{dt} = PAv$$

Multipliant par $\rho/\rho$ et regroupant :

$$\dot{W}_{pression} = \frac{P}{\rho}(\rho \mathrm{A} v) = \dot{m}\frac{P}{\rho}$$

Notons : $\dot{W}_{pression} > 0$ à une sortie; $\dot{W}_{pression} < 0$ à une entrée.

La puissance totale devient alors :

$$\dot{W} = \dot{W}_{VC} + \dot{W}_{\tau} + \sum_s \dot{m}\frac{P}{\rho} - \sum_e \dot{m}\frac{P}{\rho} \tag{5-9}$$

avec :

$$\dot{W}_{VC} = \dot{W}_P + \dot{W}_T \tag{5-10}$$

## 5.4 Écoulement stationnaire : équation d'énergie

En situation d'écoulement stationnaire, on emploie l'équation (5-8). Si on incorpore le résultat (5-9) et que l'on réarrange les termes, il vient :

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\tau} - \dot{W}_{VC} = \sum_s \dot{m}\left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) - \sum_e \dot{m}\left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) \tag{5-11}$$

Rappelons les hypothèses qui nous ont conduits au résultat (5-11).

a) écoulement uniforme sur les surfaces de passage aux entrées et aux sorties.
b) écoulement stationnaire.

Dans la mesure que les conditions citées sont satisfaites, l'équation (5-11) est tout à fait générale. Elle s'applique aux écoulements compressibles et incompressibles C'est d'ailleurs

celle-ci qui sera utilisée (sous une forme légèrement modifiée) en thermodynamique lorsque nous aurons à traiter des problèmes d'écoulement. S'agissant d'écoulements incompressibles, toutefois, il est d'usage de la récrire sous une forme quelque peu simplifiée en invoquant les concepts de hauteur de charge et de pertes de charge.

## 5.5 Écoulements incompressibles : hauteur et pertes de charge

À titre de volume de contrôle, considérons un tube de courant reliant les points d'entrée 1 et de sortie 2. Puisque la surface de passage $dA$ est infinitésimale, les propriétés (pression, vitesse, etc.) ne varient à travers celle-ci.

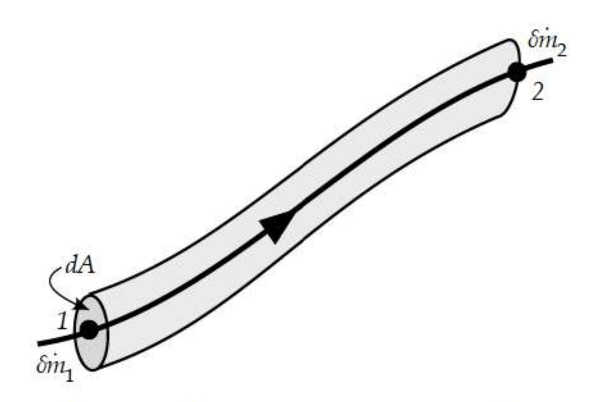



**Figure 5.4** Tube de courant comme volume de contrôle

On a donc : $$\delta\dot{m}_1 = \delta\dot{m}_2 = \delta\dot{m}$$

On peut employer (5-11) qui devient :

$$\delta\dot{Q} - \delta\dot{W}_{VC} - \delta\dot{W}_{\tau} = \delta\dot{m}\left[\left(u_2 + \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2\right) - \left(u_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1\right)\right]$$

Notons que le débit massique étant infinitésimal, il en sera de même des taux de transfert de travail et de chaleur. Si l'écoulement est incompressible ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), on obtient en réarrangeant :

$$\left(\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1\right) = \left(\frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2\right) + \frac{\delta\dot{W}_{VC}}{\delta\dot{m}g} + \frac{\delta\dot{W}_{\tau}}{\delta\dot{m}g} + \frac{1}{g}\left((u_2 - u_1) - \frac{\delta\dot{Q}}{\delta\dot{m}}\right) \tag{5-12}$$

Définissons : $$H = \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z \tag{5-13}$$

$$w_{VC} = \frac{\delta\dot{W}_{VC}}{\delta\dot{m}} = \frac{\delta\dot{W}_T}{\delta\dot{m}} + \frac{\delta\dot{W}_P}{\delta\dot{m}} = w_T + w_P \tag{5-14}$$

$$w_{\tau} = \frac{\delta\dot{W}_{\tau}}{\delta\dot{m}} \quad ; \qquad q = \frac{\delta\dot{Q}}{\delta\dot{m}} \tag{5-15}$$

et $$h_{1-2} = \frac{1}{g}\left[(u_2 - u_1) - q\right] \qquad (5\text{-}16)$$

Alors l'équation (5-12) devient:

$$H_1 = H_2 + \frac{w_{VC}}{g} + \frac{w_\tau}{g} + h_{1-2} \qquad \text{(mètres)} \qquad (5\text{-}17)$$

$H$ : Hauteur de charge en un point. La hauteur de charge peut être interprétée comme représentant « l'énergie mécanique » (en mètres) associée à un point de l'écoulement (voyez l'exemple 5.1)

$w_T$, $w_P$ : Travail massique résultant de l'action d'une turbine ou d'une pompe

$w_\tau$ : Travail massique dû au cisaillement agissant sur les parois du *VC*.

$q$ : Chaleur massique échangée entre le système et son environnement.

$h_{1-2}$: Pertes de charge. Dans les écoulements incompressibles, il est d'usage de regrouper les termes d'échange de chaleur et de variation d'énergie interne. Nous revenons sur la signification physique de cette quantité.

L'évaluation de $w_\tau$ et de $h_{1-2}$ pour une ligne de courant spécifique n'est possible que dans certains cas plutôt rares (vous pouvez consulter l'annexe du chapitre 6 pour un exemple). D'emblée, remarquons que ces grandeurs sont non-nulles que dans les cas d'écoulements visqueux; la chose est évidente concernant $w_\tau$ et peut être prouvée en ce qui a trait à $h_{1-2}$. Au chapitre 6, nous considérerons une classe d'écoulements visqueux particulière. Nous verrons qu'il est possible sous certaines conditions de rendre le travail de cisaillement nul et d'associer l'ensemble des « effets visqueux » au terme de pertes. En conséquence, on obtient la forme plus simple :

$$\boxed{H_1 = H_2 + \frac{w_{VC}}{g} + h_{1-2} \qquad \text{(mètres)}} \qquad (5\text{-}18)$$

Cette dernière formulation de l'équation d'énergie est celle dont nous ferons usage dorénavant en dynamique des fluides incompressibles (avec les aménagements qui s'appliqueront au chapitre 6).

*Que représente le terme de pertes de charge?*

En thermodynamique, on montre que :

$$h_{1-2} = \frac{1}{g}\left[(u_2 - u_1) - q\right] \geq 0$$

où : $$h_{1-2} \begin{cases} = 0 \text{ si l'écoulement est idéal} \\ > 0 \text{ si l'écoulement est visqueux} \end{cases}$$

Considérons un écoulement sans apport d'énergie du fait d'une pompe ou d'une turbine.

$$H_1 = H_2 + h_{1-2} \qquad \text{donc} \qquad H_1 > H_2 \text{ si } h_{1-2} \neq 0 \tag{5-19}$$

Si on admet que $H_1$ et $H_2$ quantifient l'énergie mécanique associée aux points 1 et 2, alors $h_{1-2}$ doit être vu comme une contribution qui « soustrait » de l'énergie mécanique à l'écoulement. La définition (5-16) indique que cette « soustraction » correspond en fait en une conversion d'énergie mécanique en énergie interne et transfert de chaleur. Dans les écoulements de liquides, la variation d'énergie interne est souvent négligeable (sauf si le *VC* est refroidi ou chauffé par un agent extérieur ou qu'il est isolé). Lorsque c'est cas, le gros des pertes correspond en fait à de l'énergie dissipée sous forme de chaleur par le système vers son environnement
($q < 0$).

Une conséquence du résultat (5-19) est que l'écoulement *avec pertes* est *irréversible*. Sans la contribution d'une pompe, il ne peut s'effectuer que du point de hauteur de charge plus élevée vers le point de hauteur de charge plus faible.

## 5.6 Équation de Bernoulli

En contrepartie de ce qui précède, un écoulement idéal (ou non-visqueux) est *réversible*. En effet, si l'écoulement est *sans pertes*, (5-19) devient :

$$H_1 = H_2 \tag{5-20}$$

c'est-à-dire : $$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \tag{5-21}$$

On observe que les points 1 et 2 sont interchangeables dans cette expression. Ce dernier résultat porte le nom d'équation de Bernoulli. Rappelons qu'il est applicable aux écoulements non-visqueux (sans pertes) qui ne comportent pas de contributions de pompe ou de turbine. Bien que bon nombre d'hypothèses doivent être satisfaites pour qu'on puisse l'employer, l'équation de Bernoulli joue un rôle prépondérant dans l'analyse et la caractérisation des écoulements incompressibles.

## 5.7 Exemples

**Exemple 5.1** Soit le réservoir de la figure 5.5. Déterminez la vitesse du jet en 2 pour un écoulement sans pertes si la pression absolue en 1 est :

a) $P_1 = P_{atm} = P_0$ ; b) $P_1 = 2\,P_{atm} = 2P_0$

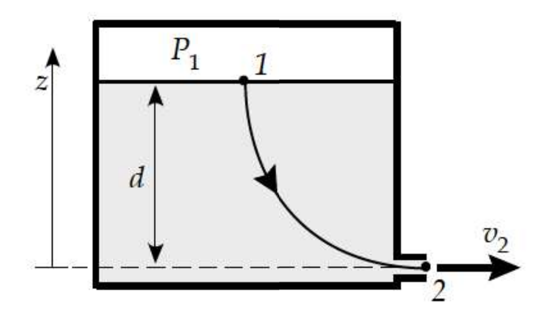



**Figure 5.5:** Exemple 5.1

L'écoulement est sans pertes; il n'y a pas de pompe ni de turbine.

$$w_P = w_T = h_{1-2} = 0$$

On a représenté un exemple de ligne de courant liant deux points. On invoque l'équation de Bernoulli.

$$H_1 = H_2$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

a) Considérons d'abord la différence $\dfrac{v_2^{\,2} - v_1^{\,2}}{2g}$.

Du fait de l'équation de continuité $Q_1 = Q_2$, on constate que $v_2 = v_1\left(\dfrac{d_1^{\,2}}{d_2^{\,2}}\right)$, ou, encore :

$$\frac{v_2^{\,2}}{v_1^{\,2}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$$

À titre d'exemple si $\left(\dfrac{d_1}{d_2}\right) = 10$ , $\dfrac{v_2^{\,2}}{v_1^{\,2}} = 10^4$ , le terme représentant l'énergie cinétique en 2 vaut 10 000 fois le terme correspondant en 1.

Alors : $\dfrac{v_2^{\,2} - v_1^{\,2}}{2g} \cong \dfrac{v_2^{\,2}}{2g}$ ce qui revient essentiellement à poser $v_1 = 0$.

Il est donc d'usage dans ce genre de circonstance de poser la vitesse nulle à la surface d'un réservoir.

Alors, puisque : $P_1 = P_2 = P_{atm} = P_0$ ; $v_1 = 0$ ; $z_2 = 0$,

on déduit : $\Rightarrow \quad v_{2a} = \sqrt{2gd}$

On observe que ce résultat correspond à la vitesse qu'un corps lâché du repos aurait après être tombé de $d$ mètres dans le vide. On interpréterait alors le phénomène comme une conversion d'énergie mécanique de gravité en énergie mécanique cinétique. Nous pouvons faire le même constat en ce qui a trait à la situation traitée.

*Remarque* : Les termes de pression ont été exprimés en pression absolue. Puisque chacun de ceux-ci peut-être écrit comme $P_{abs} = P_{atm} + P_{rel}$, les contributions de la pression atmosphérique de part et d'autre du signe d'égalité s'annulent. On aurait obtenu le même résultat si les pressions avaient été exprimées en termes de pressions relatives, c'est-à-dire : $P_1 = P_2 = 0$. C'est ce que nous ferons désormais.

b) Maintenant : $P_1 = P_0$ ; $P_2 = 0$ $v_1 = 0$ ; $z_2 = 0$.

Il vient : $\Rightarrow \quad v_{2b} = \sqrt{2\left(\frac{P_0}{\rho} + gd\right)} > v_{2a}$

On remarque que le terme de pression ($\frac{P_0}{\rho g}$ > 0) contribue à augmenter la hauteur de charge en 1 ($H_{1b} > H_{1a}$) et de ce fait donne lieu à une plus grande vitesse de sortie ($v_{2b} > v_{2a}$).

Bien que le terme de pression dans $H$ ait été introduit pour rendre du compte du travail effectué par la pression à l'entrée et à la sortie, force est de constater qu'il se comporte de la même façon que les deux autres termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de gravité. Si on veut retenir l'interprétation utilisée plus haut à savoir que l'on observe une conversion d'une forme d'énergie mécanique en une autre, on est amené à considérer le terme de pression dans $H$ comme un terme d'« énergie potentielle de compression » à l'instar de celle d'un ressort comprimé. Ainsi la hauteur de charge $H$ peut tout à fait être vue comme une mesure de l'énergie mécanique totale associée en un point de l'écoulement si on accepte cette petite modification à la définition du concept d'énergie mécanique (pour référence, voyez la note suivant l'équation (5-3)).

**Exemple 5.2** : Le tube de venturi (ou venturi) est un appareil servant à mesurer le débit dans une conduite. Il peut être horizontal ou incliné. Exprimez le débit volumique en termes des grandeurs pertinentes.

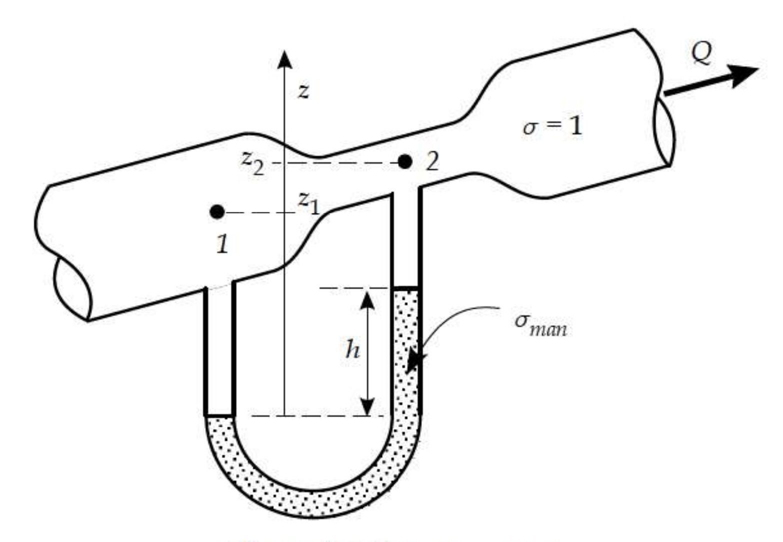



**Figure 5.6** Tube de venturi

$$H_1 = H_2$$
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

qu'on peut écrire
$$(P_1 - P_2) + \rho g(z_1 - z_2) = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

Si $A_1$ et $A_2$ désignent les sections de passage en 1 et 2, respectivement, alors par continuité on trouve :

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = K\, v_1 \quad \text{où} \quad K = \frac{A_1}{A_2}$$

Ainsi :
$$(P_1 - P_2) + \rho g(z_1 - z_2) = \frac{\rho}{2} v_1^2 (K^2 - 1) = \frac{\rho}{2} \frac{Q^2}{A_1^2}(K^2 - 1) \qquad \text{(E5.2-1)}$$

Utilisant les méthodes vues au chapitre 2 pour l'analyse d'un système manométrique :

$$P_1 + \rho g z_1 - \rho_{man} g h - \rho g(z_2 - h) = P_2$$

Après avoir réarrangé :
$$(P_1 - P_2) + \rho g(z_1 - z_2) = \rho g h(\sigma_{man} - 1) \qquad \text{(E5.2-2)}$$

Si on égalise (E5.2-1) et (E5.2-2) :

$$\frac{\rho}{2} \frac{Q^2}{A_1^2}(K^2 - 1) = \rho g h(\sigma_{man} - 1)$$

Donc :

$$Q = A_1 \sqrt{\frac{2gh(\sigma_{man} - 1)}{(K^2 - 1)}} = k\sqrt{h}$$

Notons que la différence d'élévation $(z_2 - z_1)$ n'apparaît pas explicitement dans l'expression. Étant donné un débit $Q$, qu'est-ce qui serait modifié dans le résultat ci-haut si le venturi est orienté à l'horizontale?

**Exemple 5.3 :** Une pompe est utilisée pour pomper l'eau d'un réservoir ouvert à l'atmosphère. Le jet en 2 doit sortir à 5 m/s. Quelle puissance doit fournir la pompe dans les deux cas suivants :

a) l'écoulement est sans pertes ;
b) les pertes de charge entre 1 et 2 sont $h_{1-2}$ = 4 m.

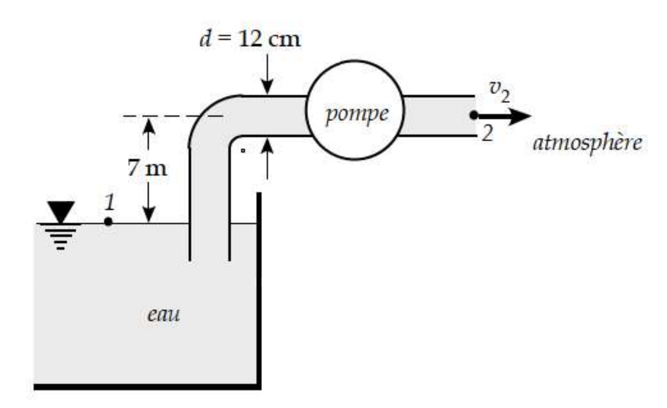



**Figure 5.7** Figure de l'exemple 5.3

a) $h_{1-2} = 0$

$$H_1 = H_2 + \frac{w_{Pa}}{g}$$

$$w_P = g(H_1 - H_2)$$

Puisque : $P_1 = P_2 = v_1 = z_1 = 0$ ; $v_2 = 5$ m/s ; $z_2$=7 m

$$\Rightarrow \quad w_{Pa} = -\left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2\right) = -\left(\frac{5^2}{2} + 9{,}81 * 7\right) = -81{,}17 \text{ J/kg}$$

$$\dot{m} = \rho \bar{v}_2 A_2 = 56{,}55 \text{ kg/s}$$

$$\dot{W}_{Pa} = \dot{m}\, w_{Pa} = -\ 4590{,}1 \text{ W}$$

b) $h_{1-2} = 8$ m

$$H_1 = H_2 + \frac{w_{Pb}}{g} + h_{1-2}$$

$$w_{Pb} = g\left(H_1 - H_2 - h_{1-2}\right)$$

$$w_{Pb} = -\left(\frac{v_2^2}{2} + g\left(z_2 + h_{1-2}\right)\right) = -120{,}41 \text{ J/kg}$$

$$\dot{W}_{Pb} = \dot{m}\, w_{Pb} = -\ 6809{,}0 \text{ W}$$

Reproduire les mêmes conditions aux deux points de l'écoulement dans le deuxième cas ($h_{1-2} = 5$ m) requiert un apport en énergie plus important de la part de la pompe. Il est donc naturel d'associer $h_{1-2}$ aux pertes énergétiques qui interviennent entre ces deux points.

Dans le cas qui nous occupe, ces pertes de charge exprimées en puissance sont donc :

$$\dot{W}_h = \dot{m} g h = 56{,}54 * 9{,}81 * 4 = 2219 \text{ W} = \left|\dot{W}_{Pb} - \dot{W}_{Pa}\right|$$

On note que les pertes exprimées en puissance correspondent exactement à la différence des puissances calculées dans les deux cas considérés.

## 5.8 La variation de pression normalement aux lignes de courant

L'équation de Bernoulli et de façon plus générale, l'équation d'énergie permettent de prédire comment varie la pression quand on se déplace le long d'une ligne de courant. Mais qu'en est-il si on se déplace transversalement à celle-ci? Par exemple de la ligne de courant *A* à la ligne de courant *B* de la figure 5.8? La figure 5.8 a) représente les forces de pression ainsi que le poids agissant sur un élément de fluide infinitésimal.

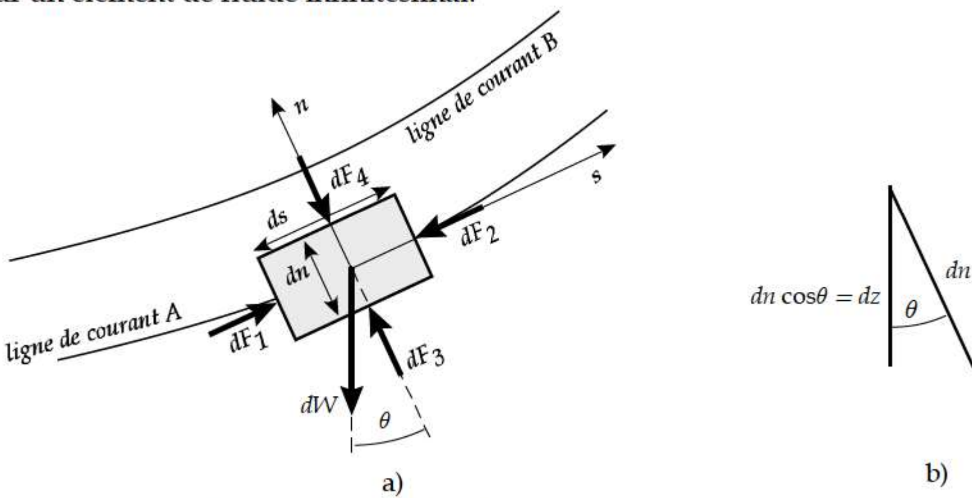



**Figure 5.8** Forces agissant sur un élément de fluide

Par souci de clarté dans le propos, nous avons omis de faire apparaître les forces de cisaillement qui agissent sur les différentes surfaces de l'élément. Les axes tangent ($s$) et normal ($n$) à la trajectoire sont représentés. L'élément de fluide a une profondeur (normale à la page) de $dx$. On peut appliquer la deuxième loi de Newton à l'élément selon chacun des deux axes en question, à savoir :

$$\sum F_s = dm\ a_s \tag{5-22}$$

$$\sum F_n = dm\ a_n \tag{5-23}$$

Écrire et résoudre l'équation (5-22) avec les forces représentées conduit directement à l'équation de Bernoulli. Pour un traitement plus général, il faut considérer, de plus, les forces de cisaillement qui ont été omises.

Écrire et résoudre l'équation (5-23), toutefois conduit à un nouveau résultat. Les forces qui agissent selon l'axe normal ($n$) sont les forces de pression agissant sur les surfaces inférieure et supérieure ainsi que la composante normale du poids (le cisaillement, même s'il était présent n'agirait pas selon cet axe).

Alors :

$$\sum F_n = dm\ a_n$$

$$\sum F_n = dF_3 - dF_4 - dW\cos\theta = a_n\ dm \tag{5-24}$$

Notons que : $dm = \rho\ dV = \rho\ dn\ dx\ ds$

La composante normale du poids s'écrit :

$$dW\cos\theta = g\cos\theta\ dm\ = \rho g\ \left(dn\cos\theta\right)\ dx\ ds$$

Référant à la figure 5.8 b) : $dW\cos\theta = \rho g\ dz\ dx\ ds$

Les forces (microforces, en fait) de pression selon l'axe normal s'écrivent, quant à elles :

$$dF_3 = P\ dA = P\ dx\ ds \quad \text{et} \quad dF_4 = \left(P + dP\right)\ dA = \left(P + dP\right)\ dx\ ds \tag{5-25}$$

Par ailleurs, de la cinématique, on sait que :

$$a_n = \frac{v^2}{\Re} \tag{5-26}$$

où $\Re$ désigne ici le rayon de courbure de la trajectoire (ligne de courant).

Insérant (5-25) et (5-26) dans (5-23), il vient :

$$\left[P - \left(P + dP\right) - \rho g\ dz\right]\ dx\ ds = \rho\frac{v^2}{\Re}\ dn\ dx\ ds$$

C'est-à-dire :

$$-dP - \rho g\ dz = \rho\frac{v^2}{\Re}\ dn \tag{5-27}$$

Le fluide étant incompressible, $-dP - \rho g\ dz = -d\left(P + \rho g z\right)$

Alors (5-27) devient :

$$\frac{\partial(P+\rho g z)}{\partial n}=-\rho\frac{v^2}{\Re} \tag{5-28}$$

En général, la résolution de cette équation peut-être assez complexe. Nous nous intéressons uniquement à décrire en termes qualitatifs le genre de prédictions qu'elle permet mais mentionnons d'abord un cas particulier important.

*Lignes de courant rectilignes*

Si l'écoulement est caractérisé par un ensemble de lignes de courant rectilignes, il vient $\Re \to \infty$ et :

$$\frac{\partial(P+\rho g z)}{\partial n}=0$$

ce qui implique que $P+\rho g z = cte$ si on se déplace normalement aux lignes de courant. Alors dans le cas de la situation illustrée à la figure 5.9,

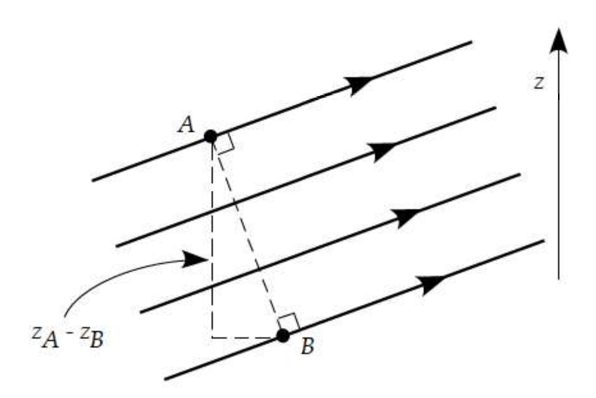



**Figure 5.9** Variation de pression normalement aux lignes de courant

on aura :

$$P_A+\rho g z_A = P_B+\rho g z_B$$
$$P_A - P_B = -\rho g(z_A - z_B) \tag{5-29}$$

à savoir : la pression varie de façon hydrostatique entre les deux points considérés.

*Écoulement à l'horizontale*

Si l'écoulement s'effectue dans le plan horizontal, on pose $dz$ = 0 dans (5-27) ou, de façon équivalente, $z$ = $cte$ dans l'équation (5-28). On obtient alors :

$$\frac{\partial P}{\partial n}=-\rho\frac{v^2}{\Re} \tag{5-30}$$

Rappelons que l'axe $n$ pointe en direction du centre de courbure de la trajectoire. Le résultat qui précède montre que dans le cas d'un écoulement horizontal, la pression va en décroissant quand on se rapproche du centre de courbure (figure 5.10).

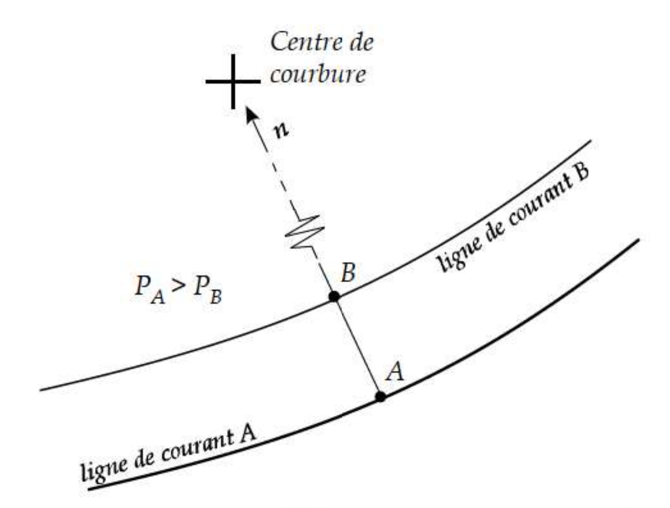



**Figure 5.10** La pression va en diminuant quand on se rapproche du centre de courbure

Ce fait est observé, par exemple, au centre d'une dépression atmosphérique. Faisant abstraction des courants verticaux, le gros de la masse d'air impliquée effectue une rotation presque circulaire autour du centre de la dépression et la pression varie en accord avec (5-30).

## 5.9 EXERCICES

**NB : À moins de mention particulière, considérez pour les exercices qui suivent que les pressions sont des pressions relatives et que les écoulements sont sans pertes.**

**Problème 1** À la figure p 5.1, de l'eau est pompée à la vitesse de 1,8 m/s dans une conduite inclinée vers le haut (1 m d'élévation pour 5 m de longueur). L'eau est pompée à partir d'une fosse d'alimentation au repos. À une pression absolue de 2,34 kPa, l'eau se vaporise, formant des bulles. Calculez la longueur maximale du tuyau si on veut éviter ce phénomène. Considérez que : $P_{atm}$ = 101,3 kPa.

Rép. : L = 49,6 m

**Problème 2** Un jet d'eau de 12 cm de diamètre monte verticalement à 20 m de hauteur, le jet demeurant de section circulaire (figure P 5.2). Calculez le débit d'eau et le diamètre du jet à 10 m d'élévation.

Rép. : $Q$ = 0,224 m$^3$/s ; $d$ = 14,27 cm

**Problème 3** Une conduite circulaire longue de 5 m est inclinée vers le haut à 30°. Le diamètre passe de 10 cm à l'entrée à 15 cm à la sortie. Calculez le débit volumique d'essence ($\sigma$ = 0,74) si les indicateurs de pression à l'entrée et à la sortie donnent les mêmes valeurs.

Rép. : $Q$ = 0,0614 m$^3$/s

**Problème 4** Un raccord conique incliné vers le bas voit son diamètre passer de 1,2 m à 0,6 m sur une différence de niveau de 3 m (figure P 5.4). La pression au point le plus haut est 69 kPa. Négligeant le frottement, calculez la pression au point le plus bas pour un débit d'eau de 5,5 m$^3$/min.

Rép. : $P$ = 98,4 kPa

**Problème 5** À la figure P 5.5, un venturi dont le diamètre au col est de 100 mm est relié à une conduite de 250 mm dans laquelle s'écoule un débit de 0,1 m$^3$/s d'huile ($\sigma$ = 0,9). On relie la conduite d'amenée et le col du venturi à un manomètre en U contenant du mercure ($\sigma$ = 13,6). Calculez la différence de niveau dans le manomètre.

Rép. : $h$ = 0,571 m

**Problème 6** Un écoulement circule dans un tube réducteur tel qu'illustré à la figure P 5.6. Les pressions statiques aux points 1 et 2 sont mesurées à l'aide d'un manomètre en U inversé contenant de l'huile de densité $\sigma < 1$. Exprimez $h$ en fonction du débit $Q$, des sections $A_1$ et $A_2$, de $\sigma$ et de la constante gravitationnelle $g$.

$$\text{Rép. : } h = \left(\frac{Q}{A_1}\right)^2 \left(\frac{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}{2g(1-\sigma)}\right)$$

**Problème 7** De l'eau à 20 °C est siphonnée d'un large réservoir vers l'atmosphère à travers un tube de diamètre constant (figure P 5.7). Sachant que la pression atmosphérique est de 101 kPa et que la pression absolue de vaporisation de l'eau à cette température est de 2,34 kPa, calculez la hauteur $L$ maximale admissible si on veut siphonner l'eau en évitant la cavitation (vaporisation de l'eau). Si le diamètre de la conduite est 10 cm, quel est le débit volumique?

Rép. : $L$ = 8,08 m ; $Q$ = 0,0920 m³/s

**Problème 8** De l'eau s'écoule à travers la conduite réductrice illustrée à la figure P 5.8. Calculez le débit volumique en fonction du diamètre $d$.

Rép. : $Q = 1{,}556\ d^2$

**Problème 9** Considérant la figure P 5.9, calculez le débit volumique en fonction du diamètre $d$ si $d/D = 1/2$.

Rép. : $Q = 1{,}607\ d^2$

**Problème 10** Un jet d'eau s'élève jusqu'à la hauteur $h$ comme il est illustré à la figure P 5.10. Calculez le débit ainsi que $h$.

Rép. : $Q$ = 0,0252 m³/s ; $h$ = 8,4 m

**Problème 11** Exprimez le débit volumique d'eau à travers la conduite de la figure P 5.11 en fonction des paramètres de la figure. Calculez-le si $d$ = 8 cm, $h$ = 50 cm et $\sigma$ = 0,9.

$$\text{Rép. : } Q = \frac{\pi}{4}\sqrt{2gh(1-\sigma)}\ d^2 ; \quad Q = 0{,}00498 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Problème 12** De l'eau circule dans une conduite en Y comme il est illustré à la figure P 5.12, l'écoulement se faisant dans le plan horizontal. Calculez la pression au point (3).

Rép. : $P_3$ = 404,5 kPa

**Problème 13** De l'eau s'écoule d'un large réservoir représenté à la figure P 5.13. Déterminez le débit volumique et la pression au point *A*. Les sorties débouchent à l'atmosphère.

Rép. : $Q_1$ = 0, 0091 m³/s ; $P_1$ = 57,9 kPa

**Problème 14** Quelle est la puissance maximale que peut générer la turbine hydroélectrique de la figure P 5.14 ?

Rép. : $\dot{W} = 2{,}23$ MW

**Problème 15** Une huile de lubrification ($\rho$ = 871 kg/m³) est pompée à travers une conduite de 20 cm de diamètre (figure P 5.15). Calculez la puissance fournie par la pompe pour un débit de 0,1 m³/s.

Rép. : $\dot{W} = 16{,}7$ kW

**Problème 16** De l'eau est en écoulement à travers un Y couché dans le plan horizontal (figure P 5.16). La pression à l'entrée du Y est de 200 kPa et le débit est de 0,15 m³/s alors que le débit en 2 est 0,1 m³/s. Si par ailleurs les diamètres en 1 et 2 sont de 20 cm et en 3, de 10 cm, calculez les pressions en 2 et en 3.

Rép. : $P_2$ = 206,3 kPa ; $P_3$ = 191,1 kPa

**Problème 17** Pour le dispositif de la figure P 5.17, calculez la hauteur $h$ telle que l'écoulement sera stationnaire.

Rép. : $h$ = 98,8 cm

**Problème 18** Une pompe fournit 5 kW à l'écoulement illustré à la figure P 5.18. Quelle est la vitesse de l'écoulement à la sortie en *B*? Que vaut la pression relative au point *A* situé juste avant la pompe?

Rép. : $v_B$ = 13,48 m/s ; $P_A$ = -100.84 kPa

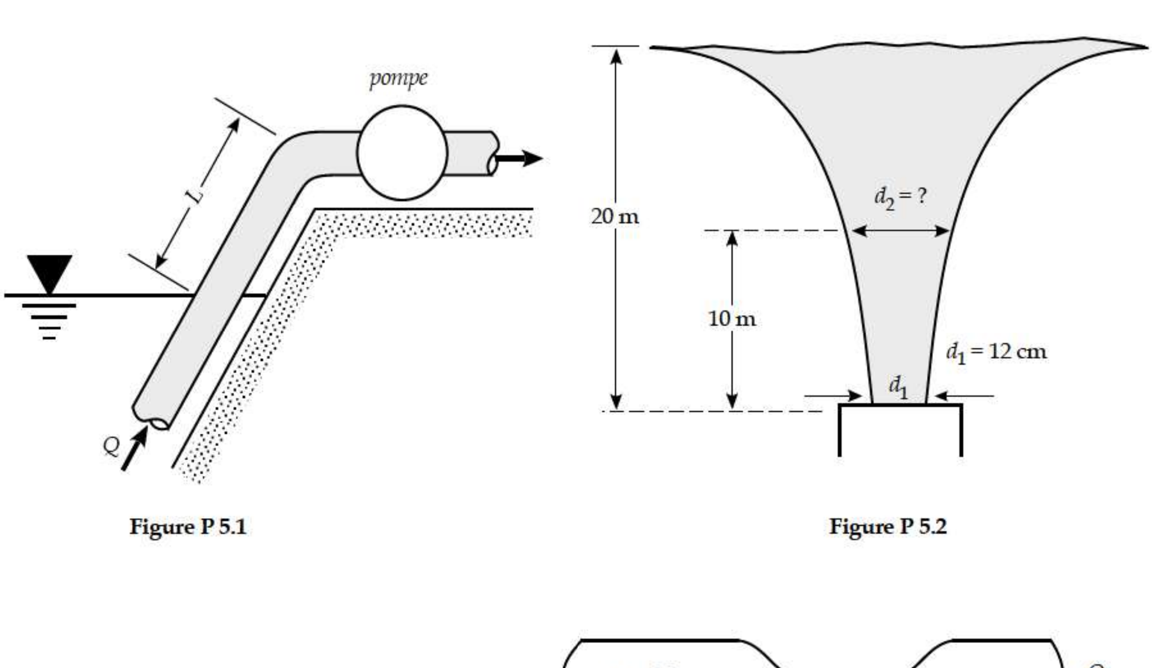



Figure P 5.1

Figure P 5.2

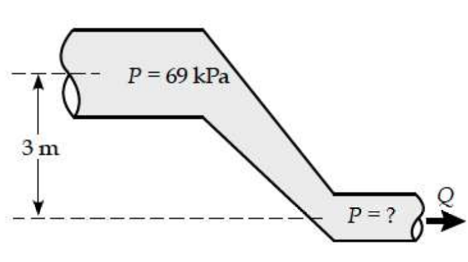



Figure P 5.4

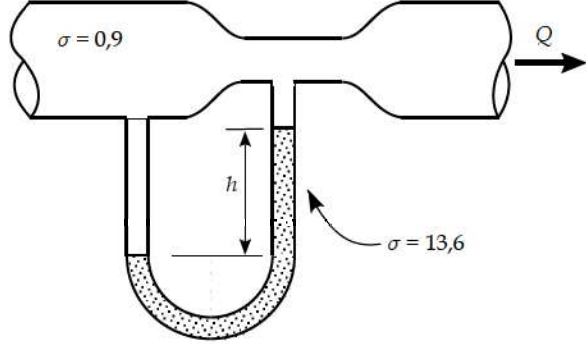



Figure P 5.5

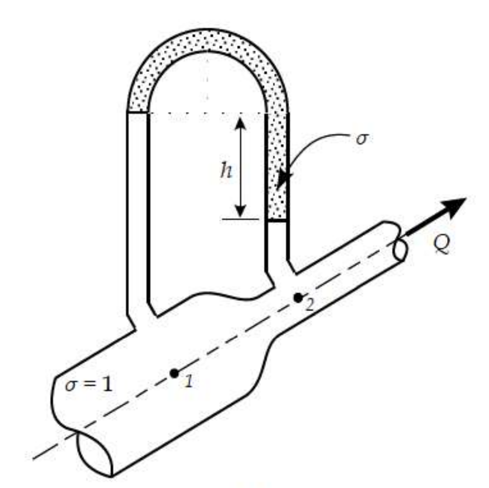



Figure P 5.6

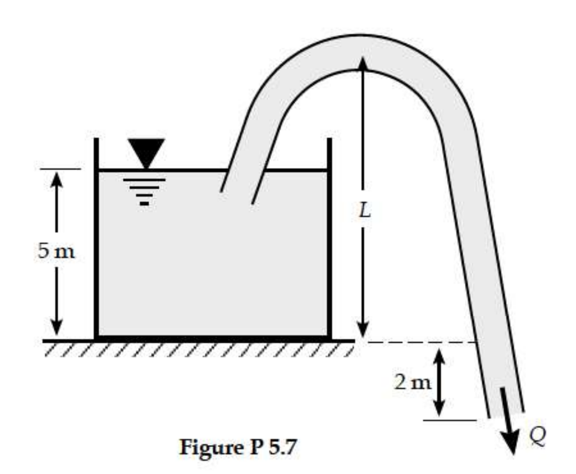



Figure P 5.7

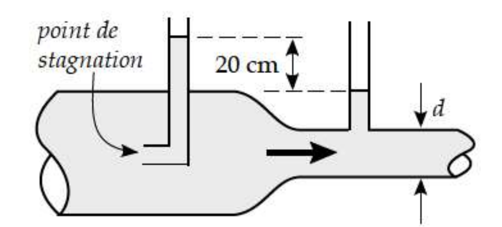



**Figure P 5.8**

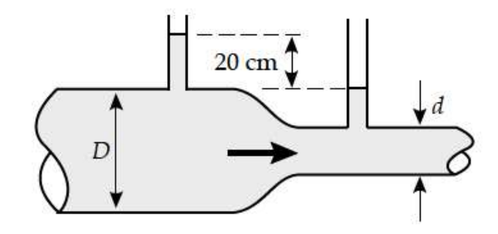



**Figure P 5.9**

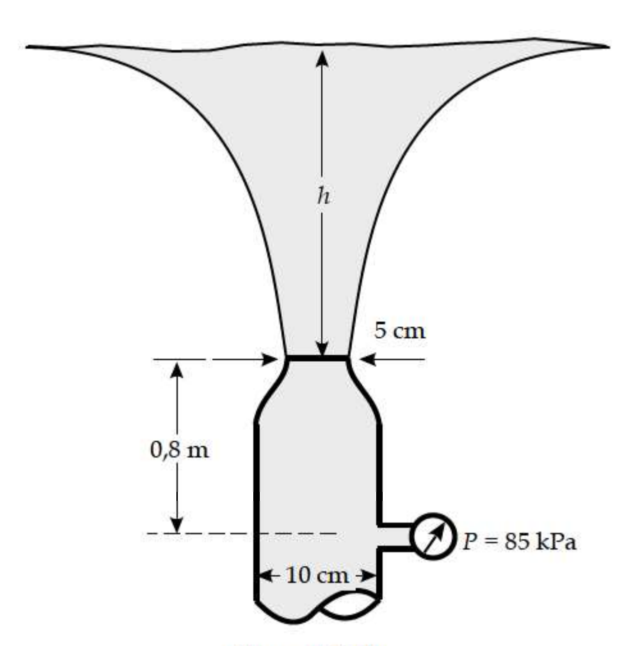



**Figure P 5.10**

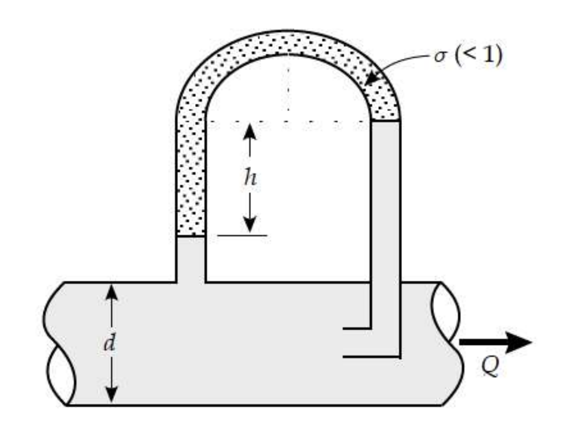



**Figure P 5.11**

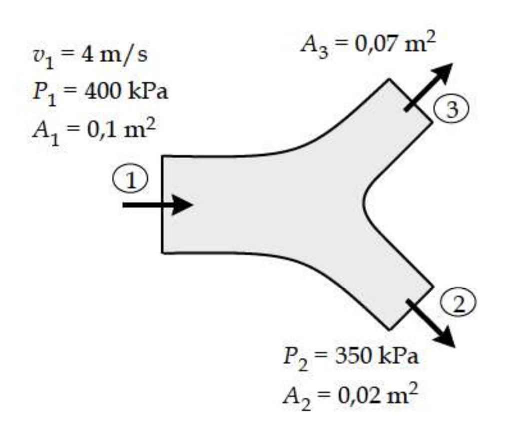



**Figure P 5.12**

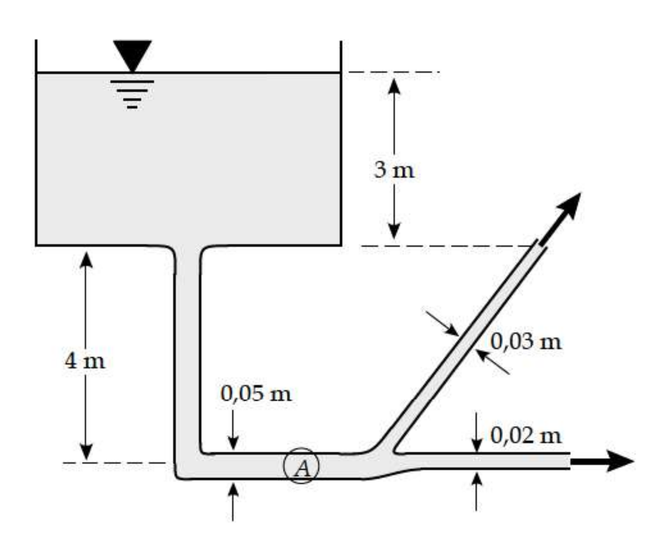



**Figure P 5.13**

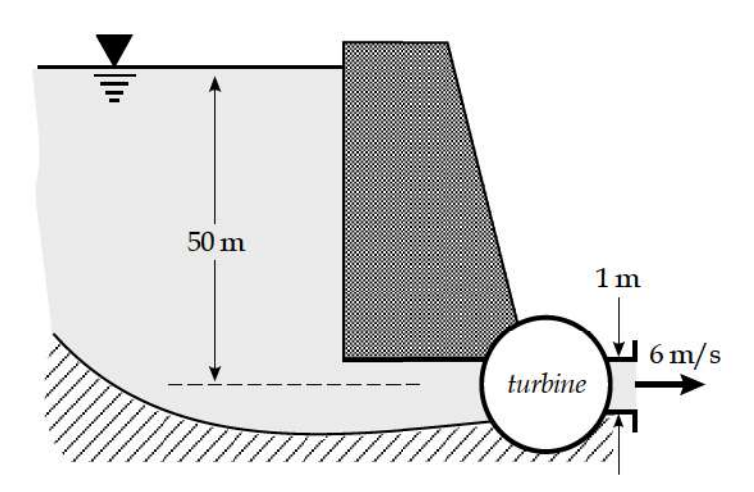



**Figure P 5.14**

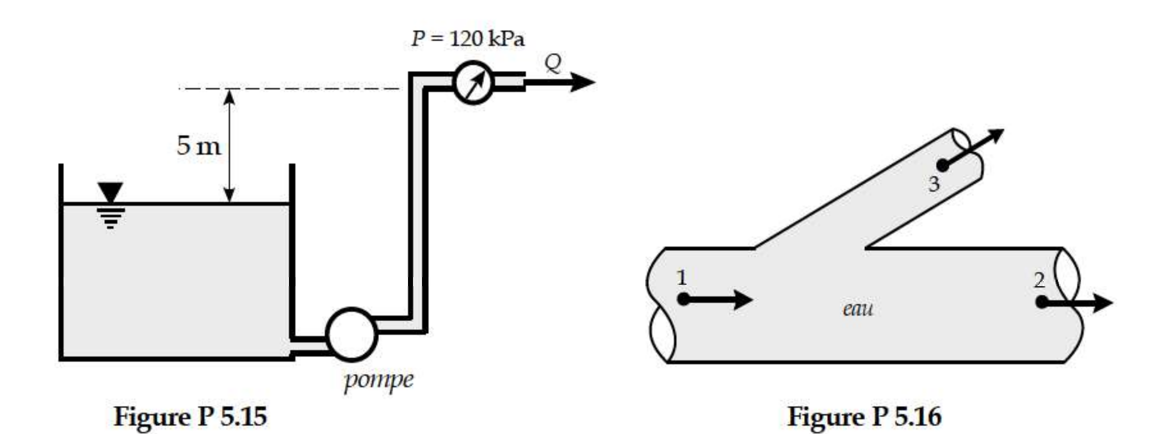



**Figure P 5.15** **Figure P 5.16**

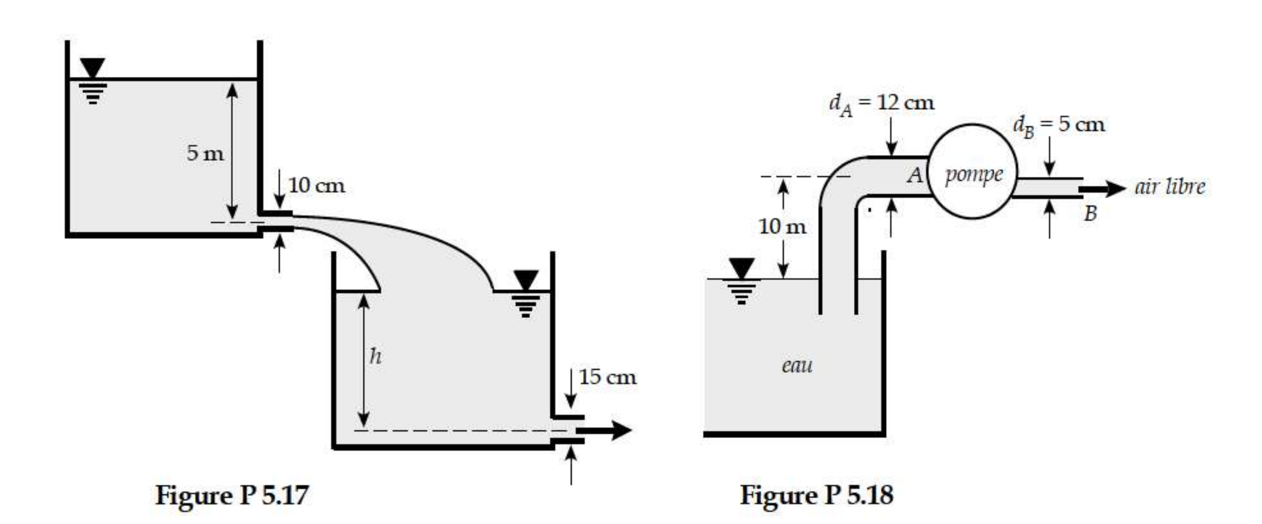



**Figure P 5.17** **Figure P 5.18**

# CHAPITRE 6

# LES ÉCOULEMENTS VISQUEUX EN CONDUITE

## Table des matières

**6.1 Introduction** **3**

**6.2 Écoulements pleinement développés** **3**

**6.3 Équation d'énergie pour les écoulements en conduite** **4**

6.3.1 Facteur de correction $\alpha$ 5

6.3.2 L'équation d'énergie pour les écoulements en conduite 6

**6.4 Considérations générales sur les pertes de charge d'une conduite** **7**

6.4.1 La relation entre la pression et le cisaillement 9

6.4.2 Retour sur les mécanismes des effets visqueux 10

6.4.3 L'analyse dimensionnelle et l'équation de Darcy-Weisbach 11

**6.5 Les pertes de charge linéaires $h_L$** **14**

6.5.1 Les pertes linéaires dans les écoulements laminaires en conduite 14

6.5.2 Les pertes linéaires dans les écoulements turbulents en conduite 17

6.5.3 Résumé des résultats des sections 6.5.1 et 6.5.2 20

**6.6 Pertes singulières** **21**

**6.7 EXERCICES** **27**

**6.8 ANNEXE A1 : Analyse dimensionnelle** **35**

6.8.1 Les bases de l'analyse dimensionnelle 35

6.8.2 Le théorème pi 36

6.8.3 Applications de l'analyse dimensionnelle 37

**6.9 ANNEXE A2 : Discussion sur les pertes et les pertes moyennes.** **41**

## 6.1 Introduction

La description complète de l'écoulement d'un fluide visqueux est particulièrement complexe en général. Il existe toutefois une classe d'écoulements de grande importance qui se prête à une étude plus simple: les écoulements en conduite.

Après avoir décrit en termes qualitatifs l'établissement d'un écoulement développé, nous décrirons comment l'équation d'énergie présentée au chapitre précédent doit être modifiée pour rendre compte des situations décrites ce qui nous amènera à discuter du calcul des pertes dans les cas d'écoulements laminaires et turbulents.

## 6.2 Écoulements pleinement développés

Quand un fluide entre dans une conduite, son profil de vitesse se modifie pour rendre compte du changement de conditions auxquelles il est soumis. Si, par exemple, la conduite est alimentée par un réservoir, le profil de vitesse à l'entrée sera pratiquement uniforme (figure 6.1). À mesure que le fluide progresse à travers la conduite, les effets visqueux (notamment la condition de non-glissement) entrainent une modification du profil de vitesse jusqu'à un certain point au-delà duquel sa forme n'évolue plus. On dit alors que l'écoulement est pleinement développé. La distance sur laquelle s'opère cette modification est dénommée longueur d'entrée $L_e$.

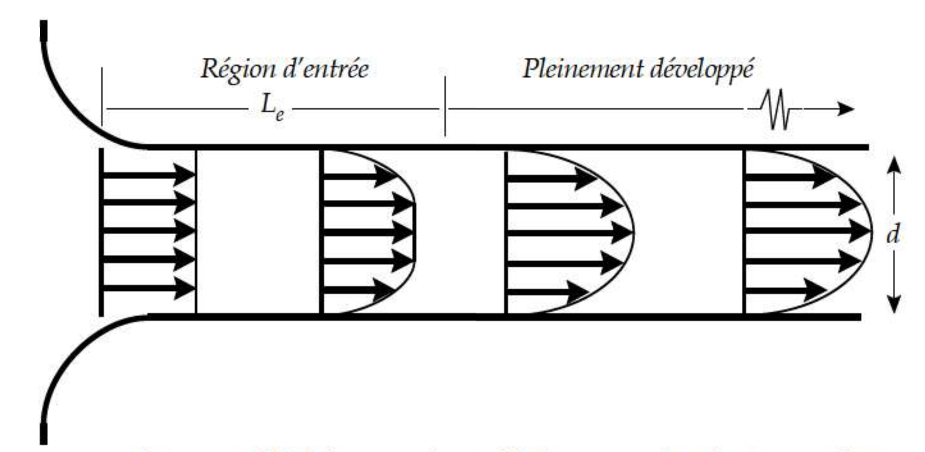



**Figure 6.1** Modification du profil de vitesse dans la région d'entrée et écoulement pleinement développé

Si le diamètre de la conduite est $d$, alors on a environ :

$$\frac{L_e}{d} = 0{,}06\,\mathrm{Re} \qquad \text{pour un écoulement laminaire}$$

$$\frac{L_e}{d} = 4{,}4(\mathrm{Re})^{\frac{1}{6}} \qquad \text{pour un écoulement turbulent}$$

**Exemple 6.1** Calculez la longueur d'entrée pour deux écoulements avec Re = 1500 et Re = 50000 respectivement, à travers des conduites de 2 cm et 50 cm de diamètre.

*Solution*

*i)* Re = 2000

écoulement laminaire, alors : $\frac{L_e}{d} = 0{,}06\,\text{Re} = 90$

conduite de 2 cm de diamètre, $L_e$ = 1,8 m

conduite de 50 cm de diamètre, $L_e$ = 45 m

*ii)* Re = 50000

écoulement turbulent, alors : $\frac{L_e}{d} = 4{,}4(\text{Re})^{\frac{1}{6}} = 26{,}71$

conduite de 2 cm de diamètre, $L_e$ = 53 cm

conduite de 50 cm de diamètre, $L_e$ = 13,35 m

Notons que $L_e$ peut être assez appréciable dans certains cas, notamment pour les écoulements laminaires. À la suite, nous négligerons cet effet de transition et considérerons que les écoulements sont pleinement développés.

## 6.3 Équation d'énergie pour les écoulements en conduite

À la section 5.5 nous avons établi que l'équation d'énergie exprimée en termes de hauteurs de charges était donnée par l'équation (5-17).

$$H_1 = H_2 + \frac{w_{VC}}{g} + \frac{w_\tau}{g} + h_{1-2} \qquad (5\text{-}17)$$

Ce résultat relie les conditions en deux points d'une ligne de courant spécifique. Toutefois, comme il l'a déjà été mentionné, l'évaluation du travail massique dû au cisaillement $w_\tau$ et des pertes de charge $h_{1-2}$ pose problème pour une ligne de courant quelconque. Dans le cas des écoulements en conduite, la pratique veut qu'on prenne comme volume de contrôle l'ensemble de la région à l'intérieur de la conduite. Comme la vitesse de l'écoulement s'annule à la paroi, la puissance associée au cisaillement s'annule elle aussi. L'ensemble des effets visqueux sont alors associés au terme de pertes de charge et l'équation d'énergie (en termes de hauteurs de charge) qui en résulte prend la forme plus simple de l'équation (5-18).

$$H_1 = H_2 + \frac{w_{VC}}{g} + h_{1-2} \qquad (5\text{-}18)$$

À quelle ligne de courant réfère l'équation (5-18) alors? Quand on écrit et utilise (5-18) pour un écoulement dans une conduite, il est implicite que l'écoulement est considéré comme étant constitué de lignes de courant identiques caractérisées par des propriétés moyennes. Les quantités qui apparaissent dans $H$ sont remplacées par leur valeur moyenne respective. Puisque la pression $P$ et l'élévation $z$ varient généralement peu à travers la section d'une conduite, leur terme associé dans $H$ ne nécessitent pas véritablement considération. Il n'en va pas de même pour le terme représentant l'énergie cinétique ($v^2/2g$) parce que la vitesse varie beaucoup d'un point à l'autre de la section de passage. Si on veut employer la vitesse moyenne $\overline{v}$ pour le calcul de la hauteur de charge, on doit procéder à un aménagement dans la définition de $H$.

$$\boxed{H = \frac{P}{\rho g} + \alpha \frac{\overline{v}^2}{2g} + z} \qquad (6\text{-}1)$$

Le paramètre $\alpha$ est un facteur de correction dont l'emploi est rendu nécessaire par le remplacement de la vitesse en un point de l'écoulement par la vitesse moyenne. Il joue pour l'équation d'énergie un rôle analogue au rôle joué par le facteur de correction $\beta$ dans l'équation de quantité de mouvement au chapitre 4.

### 6.3.1 Facteur de correction α

En général, le débit d'énergie cinétique à travers une surface de passage du volume de contrôle est donné par :

$$\dot{E}_K = \frac{1}{2}\int_A \rho v^2 v_{rn} dA$$

Dans le cas d'une conduite, $v_{rn} = v$. Si on veut faire usage de la vitesse moyenne $\overline{v}$, on doit avoir l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2}\int_A \rho v^3 dA = \alpha \frac{\rho}{2}\overline{v}^3 A$$

$\alpha$ doit donc valoir :

$$\alpha = \frac{\int_A v^3 dA}{\overline{v}^3 A} \qquad (6\text{-}2)$$

Notons qu'on aura, comme il se doit, $\alpha = 1$ pour un écoulement uniforme (écoulement idéal).

**Exemples 6.2:** Calculez le coefficient de correction pour un écoulement dont le profil de vitesse est donné par :

$$v(r) = v_c \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^n \right]$$

*Solution*

Pour ce type d'écoulement la vitesse moyenne est donnée par l'expression (voyez l'exemple 4.2) :

$$\overline{v} = \frac{n\ v_c}{n+2}$$

En vertu de (6-2), $\alpha$ est donné par:

$$\alpha = \frac{\int_0^R \left( v_c \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^n \right] \right)^3 (2\pi r\ dr)}{\left( \frac{n\ v_c}{n+2} \right)^3 \left( \pi R^2 \right)}$$

Après manipulation, on trouve :

$$\alpha = \frac{3(n+2)^2}{(3n+2)(n+1)}$$

### 6.3.2 L'équation d'énergie pour les écoulements en conduite

Si l'équation d'énergie (5-18) est récrite considérant la définition (6-1), il vient :

$$\boxed{H_1 = H_2 + \frac{w_{VC}}{g} + h_{1-2}} \qquad (6\text{-}3)$$

$$\boxed{\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\overline{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\overline{v}_2^2}{2g} + z_2 + \frac{w_{VC}}{g} + h_{1-2}} \qquad (6\text{-}4)$$

L'équation (6-4) est la forme de l'équation d'énergie que nous emploierons pour traiter des écoulements dans des conduites. Les pertes de charge $h_{1-2}$ peuvent être le fait de plusieurs facteurs intervenant entre les points 1 et 2 considérés. On écrira alors :

$$h_{1-2} = \sum h \qquad (6\text{-}5)$$

## 6.4 Considérations générales sur les pertes de charge d'une conduite

Soit l'écoulement pleinement développé d'un fluide à travers une conduite horizontale à section constante.




**Figure 6.2** Écoulement développé à travers une conduite à section constante

Écrivant l'équation d'énergie (6-4) entre les points représentés à la figure 6.2, il vient :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\alpha_1\frac{\overline{v}_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\rho g}+\alpha_2\frac{\overline{v}_2^2}{2g}+h_{1-2}$$

Puisque la section de la conduite ne change pas, et que l'écoulement est pleinement développé, le profil de vitesse se maintient entre les deux points, c'est-à-dire :

$$\alpha_1=\alpha_2 \quad \text{et} \quad \overline{v}_1=\overline{v}_2$$

à savoir :

$$\frac{P_1}{\rho g}=\frac{P_2}{\rho g}+h_{1-2}$$

Donc :

$$h_{1-2}=\frac{P_1-P_2}{\rho g} \tag{6-6}$$

Ce résultat est intéressant à plusieurs égards. D'abord, il indique que dans le cas d'un écoulement de conduite à l'horizontale, les effets visqueux (les pertes) entraînent une chute de pression le long de l'écoulement. Rappelons en effet que les pertes sont exclusivement positives (si non-nulles). C'est ce fait qui rend nécessaire l'introduction d'une ou de plusieurs pompes dans le circuit afin de maintenir l'énergie de l'écoulement (ou, de façon équivalente, la pression). Ensuite, le résultat qui précède donne une indication de la façon d'établir expérimentalement les pertes occasionnées entre deux points d'un écoulement. La mesure de la chute de pression conduit directement à la grandeur des pertes de charge.

Si la conduite est inclinée, la différence d'élévation doit être considérée et l'équation d'énergie donne après réarrangement :

$$P_1-P_2=\rho g\left((z_2-z_1)+h_{1-2}\right)$$

Deux cas se présentent : *i)* la conduite est inclinée vers le haut
*ii)* la conduite est inclinée vers le bas.

*i) la conduite est inclinée vers le haut*

La différence d'élévation ($z_2 - z_1$) étant positive, la pression chute nécessairement du point 1 vers le point 2, c'est-à-dire $P_1 - P_2 > 0$. On peut dire que les effets gravitationnels se combinent aux pertes pour faire diminuer la pression quand l'écoulement s'élève en hauteur

*ii) la conduite est inclinée vers le bas*

La différence d'élévation ($z_2 - z_1$) est négative. Le signe algébrique de la quantité

$$(z_2 - z_1) + h_{1-2} \overset{?}{\gtrless} 0$$

est maintenant indéterminé. On peut alors se retrouver dans la situation apparemment paradoxale que la pression soit moins importante en un point moins élevé. Il n'y a pas de contradiction : les effets gravitationnels qui contribuent à augmenter la pression quand l'élévation diminue sont en compétition avec les pertes qui agissent de façon à faire décroître la pression. Ce sont les importances relatives de ces deux effets qui détermineront le résultat. Notons que ce fait est nouveau; il n'y a pas l'équivalent pour les écoulements sans pertes.

Pour la conduite inclinée, l'équation d'énergie donne :

$$h_{1-2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + (z_1 - z_2)$$

ou encore :

$$h_{1-2} = \frac{1}{\rho g}\left((P_1 + \rho g z_1) - (P_2 + \rho g z_2)\right)$$

Définissons une nouvelle quantité, la *pression piézométrique* :

$$P^* = P + \rho g z$$

Ainsi, les pertes peuvent s'écrire :

$$h_{1-2} = \frac{P^*_1 - P^*_2}{\rho g} = \frac{\Delta P^*}{\rho g} \tag{6-7}$$

On remarque que l'équation (6-6) peut être considérée comme un cas particulier de (6-7) pour lequel $z_1 = z_2$ . De plus, l'équation (6-7) convient aussi aux situations où les deux points considérés ne sont pas reliés par une conduite rectiligne. Dans la mesure que les sections (et profils de vitesse) sont identiques en 1 et en 2, (6-7) s'applique. Ainsi, l'écoulement peut être dévié par un coude ou, par exemple, passer à travers un robinet et l'équation (6-7) pourra être utilisée si les sections sont les mêmes aux deux points.

### 6.4.1 La relation entre la pression et le cisaillement

Soit un écoulement pleinement développé dans une conduite circulaire inclinée comme il est illustré à la figure 6.3. Considérons comme objet d'étude la matière à l'intérieur du cylindre de rayon $r$ et de longueur $L$. Selon l'axe de l'écoulement, agissent sur le corps les forces dues à la pression aux deux extrémités ainsi que celle due au cisaillement sur le pourtour et, finalement, la composante du poids selon cet axe.

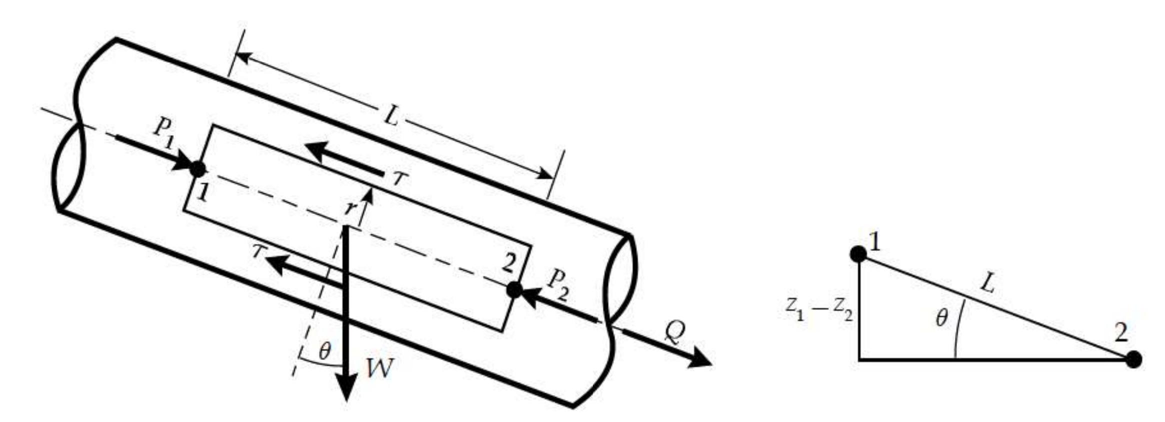



**Figure 6.3** Forces agissant selon l'axe de l'écoulement sur un cylindre

La matière en mouvement vers la droite se déplace à vitesse constante. Les forces contribuant à l'accélérer vers le bas et la droite (composante du poids et forces dues à la pression) doivent être compensées par la force exercée par le cisaillement. On a donc :

Forces dues à la pression en 1 et en 2 : $F_{P1} = \pi r^2 P_1 \;\; ; \; F_{P2} = \pi r^2 P_2$

Force due au cisaillement : $F_\tau = 2\pi r L \tau$

Composante du poids : $W_{axe} = mg\sin\theta = \rho\left(\pi r^2 L\right) g \sin\theta = \pi r^2 \rho g \left(z_1 - z_2\right)$

$$\sum F_{axe} = F_{P1} - F_{P2} - F_\tau + W_{axex} = 0$$

$$\sum F_{axe} = \pi r^2 P_1 - \pi r^2 P_2 - 2\pi r L \tau + \pi r^2 \rho g \left(z_1 - z_2\right) = 0$$

en réarrangeant :

$$\pi r^2 \left( \left(P_1 - P_2\right) - \frac{2L\tau}{r} + \rho g \left(z_1 - z_2\right) \right) = 0$$

$$\left(P_1 + \rho g z_1\right) - \left(P_2 + \rho g z_2\right) - \frac{2L\tau}{r} = 0$$

Utilisant la définition de la pression piézométrique, on trouve :

$$\Delta P^* = \frac{2L\tau}{r} \tag{6-8}$$

Du fait de (6-7), il vient donc :

$$h_{1-2} = \frac{\Delta P^*}{\rho g} = \frac{2L\tau}{\rho g r} \tag{6-9}$$

L'équation (6-9) laisse à entendre que la connaissance de $\tau$ permet de prédire les pertes. Toutefois, comme nous le verrons plus loin, ce problème ne peut être résolu que pour une certaine classe d'écoulements. Il reste que les résultats (6-8) et (6-9) nous permettent de faire quelques constats.

Considérant d'abord (6-9), on observe que les pertes varient linéairement avec la distance $L$ entre les points 1 et 2. Ce type de pertes est dénommée *pertes linéaires* (ou régulières) et représenté par le symbole $h_L$ . Aussi, puisque ces pertes dépendent de la contrainte de cisaillement, elles seront affectées par la viscosité $\mu$ et les autres mécanismes conditionnant le cisaillement (voyez la section 6.4.2). Si on récrit (6-8) de façon légèrement différente, on a :

$$\tau = \frac{\Delta P^*}{2L} r \tag{6-10}$$

Gardons à l'esprit qu'étant donnés deux points, la quantité $\Delta P^*$ est une constante. En conséquence, la contrainte de cisaillement est proportionnelle à la position radiale $r$. Elle est donc nulle au centre et maximale à la paroi.

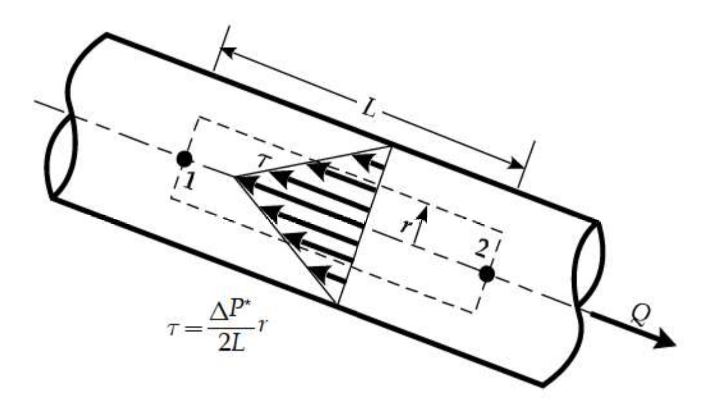



**Figure 6.4** Dépendance de la contrainte de cisaillement avec $r$

Notons que ce qui précède s'applique à tous les écoulements à travers des conduites à section constante. La nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent) n'affecte en rien les conclusions auxquelles nous sommes arrivées.

### 6.4.2 Retour sur les mécanismes des effets visqueux

À la section 1.2.3, nous avons décrit de façon qualitative des mécanismes qui donnent lieu à la génération de contraintes de cisaillement à travers l'écoulement. Nous avons invoqué l'action des forces intermoléculaires pour les liquides et le transfert de quantité de mouvement à l'échelle moléculaire pour les gaz comme sources du comportement observé. Nous avons été conduits à la loi de Newton qui décrit la relation entre la viscosité et la contrainte de cisaillement.

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} \tag{6-11}$$

Toutefois, la loi de Newton ne décrit le comportement que des écoulements laminaires. En effet, dans ce cas, l'écoulement est ordonné, les différentes couches de fluide s'écoulant à la surface l'une de l'autre. En situation d'écoulement turbulent, on assiste à un mélange intense de la matière. Bien que globalement les couches de fluide se déplacent selon l'axe de l'écoulement, la matière est brassée et un transfert de masse à l'échelle macroscopique s'opère d'une couche à l'autre (figure 6.6).

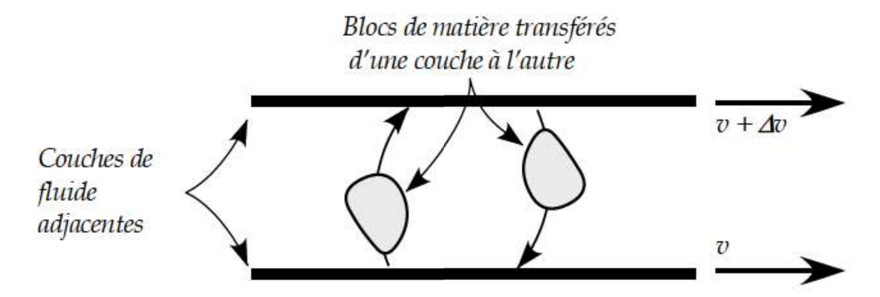



**Figure 6.6** Transfert de masse à l'échelle macroscopique

Cet effet est analogue à ce qu'on observe pour les écoulements laminaires de gaz. Toutefois, dans ce le cas de ces derniers, le transfert de matière s'opère à l'échelle moléculaire uniquement. Ici, le phénomène est tout autre : ce sont des masses appréciables qui transitent d'une couche à l'autre de façon désordonnée. Le transfert de quantité de mouvement qui en résulte se combine avec les autres mécanismes déjà mentionnés pour donner lieu au cisaillement dans le fluide s'écoulant de façon turbulente. Du fait de son ampleur, c'est cet effet qui prédomine. En fait, le cisaillement dû à ce facteur peut dépasser le cisaillement dû autres facteurs de plusieurs ordres de grandeur. En conclusion, la loi de Newton ne suffit pas à rendre compte de ce phénomène mais une description mathématique plus complète dépasse le cadre de ce texte.

### 6.4.3 L'analyse dimensionnelle et l'équation de Darcy-Weisbach

Souvent les écoulements posent problème si on veut en faire une description à partir des principes premiers de la physique (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et autres) et, en conséquence, de faire des prédictions de nature théorique. La chose est particulièrement vraie s'agissant d'écoulements turbulents. Le comportement désordonné et imprévisible à bien des égards du fluide se prête mal à des prévisions de nature théorique (quoiqu'on puisse maintenant modéliser de tels comportements de façon à peu près correcte à l'aide d'ordinateurs).

Historiquement, on a donc eu recours à une approche empirique pour traiter de la situation. On entend par approche empirique le développement de résultats et de formules établis à partir de l'expérimentation, essentiellement. Il faut comprendre que ces résultats et formules ne sont alors applicables qu'aux situations analysées en laboratoire. C'est ici qu'intervient l'analyse dimensionnelle. Le propos de ce texte n'est pas de traiter des méthodes de l'analyse dimensionnelle. Le lecteur intéressé à une première exposition est encouragé à consulter l'annexe A1 à la fin de ce chapitre. Toutefois, il convient d'en présenter de façon succincte les objets d'étude.

Souvent en raison de la complexité de la situation à étudier, on est amené à construire des modèles (le plus souvent réduits mais pas toujours) exposés à des conditions « similaires » à celles rencontrées dans la réalité afin de pouvoir faire des prédictions Quelles sont les règles qui régissent les changements d'échelle des différente éléments de ce modèle, les structures, bien sûr, mais aussi les vitesses dans le cas d'écoulements ainsi que les caractéristiques mêmes du fluide à employer? Si, par exemple, il s'agit de modéliser l'effet d'un barrage sur une rivière et que le modèle aura une taille de 20 fois inférieure à la réalité, quel débit devra-ton choisir? Quel fluide devra-t-on employer? De l'eau, comme dans le cas de la rivière?

L'analyse dimensionnelle affirme que si les deux situations peuvent être considérées « similaires », alors les conclusions auxquelles on arrive en étudiant le modèle peuvent être étendues (avec les aménagements nécessaires) à la situation réelle. Dans le cadre de ce type de traitement, on est amené à définir un certain nombre de quantités sans dimensions qui permettent d'établir ces « similitudes ». Le nombre de Reynolds constitue un exemple de grandeur de ce type. Voici trois grandeurs communément utilisées en mécanique des fluides.

| | | |
|---|---|---|
| $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho \overline{v} d}{\mu}$ | Nombre de Reynolds | classifie en laminaire ou turbulent |
| $M = \dfrac{\overline{v}}{c}$ | Nombre de Mach ($c$ : vitesse du son) | détermine si l'écoulement est incompressible |
| $F = \dfrac{\overline{v}}{\sqrt{gl}}$ | Nombre de Froude | caractérise un écoulement avec une interface |

Deux écoulements seront considérés similaires si, entre autres, ils présentent le même nombre de Reynolds. La notion de similitude présente un autre intérêt : elle permet d'appliquer des résultats obtenus dans des conditions particulières en laboratoire à toute une autre foule de situations qui ne feront pas, elles, l'objet d'étude dans la mesure que ces situations sont similaires à celles qui ont été étudiées en laboratoire.

Utilisant les méthodes de l'analyse dimensionnelle on peut établir l'équation de Darcy-Weisbach qui relie les pertes entre deux points d'une conduite rectiligne et certains paramètres caractéristiques de l'écoulement. Consultez l'annexe A1 pour une description complète de comment on arrive à ce résultat.

$$\boxed{h_L = f \frac{L}{d} \frac{\overline{v}^2}{2g}} \qquad (6\text{-}12)$$

où $f$ est un paramètre ajustable, le coefficient de friction (de Darcy).

Aucune autre hypothèse que le fait d'un écoulement à travers une conduite à section constante n'est nécessaire pour arriver à (6-12). Une grande part de son intérêt réside donc dans le fait qu'elle est applicable à toutes les situations d'écoulements que nous considérerons, laminaires et turbulents.

La question de la détermination des pertes linéaires pour un écoulement particulier n'a pas été réglée toutefois. L'expérience montre que pour une conduite donnée, $f$ est une constante dans les

cas d'écoulements très turbulents seulement. Exprimé autrement, les pertes varient comme le carré de la vitesse que pour ce type d'écoulement. Ainsi, le problème de relier les pertes aux différents paramètres de l'écoulement (vitesse, rugosité et propriétés du fluide) a été renvoyé à la détermination du paramètre ajustable *f*. Le problème reste donc entier. Quels sont les facteurs qui influenceront la grandeur du coefficient de friction *f* ?

L'analyse dimensionnelle établit, ce que confirme l'expérience, que deux nombres sans dimensions déterminent, en général, la grandeur de $f$ : la rugosité relative $\varepsilon/d$ et le nombre de Reynolds.

L'intérieur d'une conduite présente toujours des aspérités. La grandeur moyenne de ces aspérités est appelée rugosité et désignée par le symbole $\varepsilon$. La présence de ces aspérités dévie l'écoulement et peut même conduire à la production de micro-tourbillons locaux.

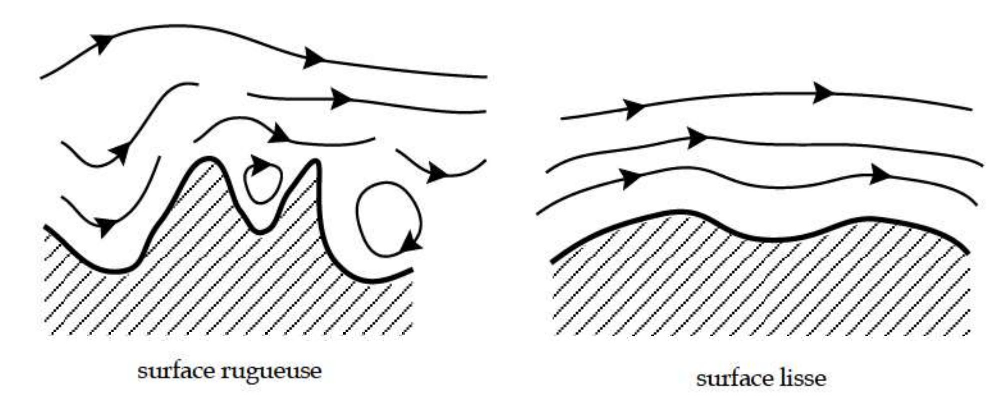



**Figure 6.6** Effet de la rugosité sur l'écoulement

On comprendra que l'effet de la présence de ces aspérités sur l'écoulement dans son ensemble dépendra de l'importance relative de la rugosité en regard de la section de passage. Les conclusions auxquelles nous arriveront par la suite s'appliqueront aux cas de rugosités relatives plutôt faibles ($\frac{\varepsilon}{d} \leq 0{,}1$). Pour les situations de rugosité relative plus importante, une analyse plus poussée du profil de vitesse est nécessaire.

Les propriétés du fluide sont, quant à elles, représentées dans la grandeur de *f* par le biais du nombre de Reynolds. Notons que puisque Re dépend de la vitesse, son influence sur *f* aura comme conséquence que les pertes linéaires ne varieront pas comme $\overline{v}^2$, en général.

| MATÉRIAU | Rugosité (mm) |
|---|---|
| Béton | 0,3 - 3,0 |
| Fer forgé | 0,03 - 0,15 |
| Acier galvanisé | 0,06 - 0,3 |
| Acier enduit | 0,03 - 0,15 |
| Fonte | 0,15 - 0,6 |
| Asphalte centrifugé | 0,3 |
| PVC | 0,015 |
| Verre, plastique | lisse |

**Tableau 6.1** Rugosité pour certains matériaux. Ces valeurs ne sevent qu'à titre indicatif. L'usure, par exemple, peut les modifier de façon appréciable.

## 6.5 Les pertes de charge linéaires $h_L$

### 6.5.1 Les pertes linéaires dans les écoulements laminaires en conduite

En situation d'écoulement laminaire, on peut utiliser la loi de Newton et égaliser les équations (6-10) et (6-11).

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} = \frac{\Delta P^*}{2L} r$$

Alors :

$$dv = -\frac{\Delta P^*}{2\mu L} r \, dr$$

$$v = -\int \frac{\Delta P^*}{2\mu L} r \, dr + C = -\frac{\Delta P^*}{2\mu L} \int r dr + C$$

$$v = -\left(\frac{\Delta P^*}{4\mu L}\right) r^2 + C$$

où C est une constante d'intégration à déterminer. Puisque la vitesse s'annule à la paroi, pour une conduite de rayon $R$ on pose :

$$v(r = R) = 0 = -\left(\frac{\Delta P^*}{4\mu L}\right) R^2 + C$$

d'où :

$$C = \frac{\Delta P^* R^2}{4\mu L}$$

En conséquence,

$$v(r) = \frac{\Delta P^* R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (6\text{-}13)$$

ou encore : $$v(r) = v_c\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{6-14}$$

avec : $$v_c = \frac{\Delta P^* R^2}{4\mu L} \tag{6-15}$$

On remarque que le profil de vitesse est parabolique et de vitesse au centre $v_c$. Utilisant les résultats de l'exemple 6.2 (avec $n = 2$), on trouve pour la vitesse moyenne, le débit volumique (et le coefficient de correction $\alpha$:

$$\overline{v} = \frac{v_c}{2} = \frac{\Delta P^* R^2}{8\mu L} \tag{6-16}$$

$$Q = \overline{v}A = \frac{\pi R^4 \Delta P^*}{8\mu L} \tag{6-17}$$

$$\alpha = 2 \tag{6-18}$$

Le résultat (6-17) appelé équation d'Hagen-Poiseuille conduit à l'expression pour les pertes en situation d'écoulement laminaire. Puisque :

$$\Delta P^* = \frac{8\mu L Q}{\pi R^4} \ ,$$

et que : $$h_L = \frac{\Delta P^*}{\rho g} \ ,$$

il vient en posant $R = \dfrac{d}{2}$ : $$h_L = \frac{128\mu L}{\pi \rho g d^4} Q$$

Utilisant la viscosité cinématique et le fait que $Q = \overline{v}A$ , on peut aussi écrire :

$$\boxed{h_L = \frac{128\mu L}{\pi \rho g d^4} Q = \frac{32\nu L}{g d^2}\overline{v}} \tag{6-19}$$

On constate que les pertes de charge sont proportionnelles à la vitesse moyenne ainsi qu'à la viscosité. Notons comment l'effet de la proximité de la paroi se fait fortement sentir. En effet, diminuer le diamètre de la conduite par un facteur 2 multiplie les pertes par 4. Toutefois, et ça peut surprendre, la rugosité n'intervient en aucune façon dans la grandeur de $h_L$.

On sait qu'on peut toujours utiliser l'équation de Darcy-Weisbach (équation (6-12)) pour évaluer les pertes linéaires. Il faut seulement établir ce que vaut le coefficient de friction $f$ dans ce cas. On doit donc avoir :

$$h_L = f\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} = \frac{32\nu L}{g d^2}\overline{v}$$

On trouve donc : $$f = \frac{64\nu}{\overline{v}d}$$

c'est-à-dire : $$\boxed{f = \frac{64}{\text{Re}}} \qquad (6\text{-}20)$$

L'emploi de (6-19) ou bien de (6-12) conjointement avec (6-20) est indifférent, comme l'indique le traitement qui précède. Il ne s'agit ici, que de question de goût.

**Exemple 6.3** De la glycérine de viscosité cinématique $\nu = 0{,}001\ \text{m}^2/\text{s}$ et de masse volumique 1300 kg/m³ s'écoule à travers une conduite horizontale de 10 cm de diamètre à la vitesse moyenne de 30 cm/s. De combien chute la pression sur la distance de 1 m? De 2,5 m?

*Solution*

Si on écrit l'équation d'énergie entre les deux points sachant qu'il n'y a pas de pompe ni de turbine,

$$H_1 = H_2 + h_{1-2}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\overline{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\overline{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_{1-2}$$

La conduite est horizontale et de section constante alors :

$$z_1 = z_2 \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \alpha_2 \ \text{avec} \ \overline{v}_1 = \overline{v}_2$$

Alors : $$\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + h_{1-2}$$

donc : $$P_1 - P_2 = \rho g h_{1-2}$$

On observe qu'il s'agit d'un écoulement laminaire .

$$\text{Re} = \frac{\overline{v}d}{\nu} = \frac{(0{,}3)(0{,}1)}{0{,}001} = 30$$

Les pertes de charge sont des pertes linéaires donc pour $L = 1$ m,

$$h_{1-2} = h_L = \frac{32\nu L}{gd^2}\overline{v} = \frac{32(0{,}001)((1))}{(9{,}81)(0{,}1)^2}(0{,}3) = 0{,}098 \text{ m}$$

On aurait pu utiliser l'équation de Darcy-Weisbach. Alors :

$$f=\frac{64}{\text{Re}}=\frac{64}{30}=2,1\overline{3}\ ; \qquad h_L=f\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}=2.1\overline{3}\frac{1}{0,1}\frac{0.3^2}{2(9,81)}=0,098\text{ m}$$

Donc :

$$P_1-P_2=\rho g h_L=1300*9,81*0,098=1248\text{ Pa}$$

Si $L$ = 2,5 m :

$h_L \propto L$ alors si la longueur est multipliée par un facteur 2,5, il en sera de même des pertes linéaires et donc de la pression.

$$P_1-P_2=2,5*1248=3120\text{ Pa}$$

### 6.5.2 Les pertes linéaires dans les écoulements turbulents en conduite

La turbulence est caractérisée par un mélange intense de la matière qui s'accompagne le plus souvent de tourbillons longitudinaux ou transversaux. L'énergie nécessaire à l'entretien de ces tourbillons doit provenir de l'écoulement. De plus, nous l'avons mentionné, ce mélange conduit à des contraintes de cisaillement qui ne peuvent être calculées à l'aide de la loi de Newton (équation (6-11)). Ce fait constitue une différence fondamentale entre le traitement des écoulements laminaires et celui des écoulements turbulents et est une des raisons que l'on se soit tourné vers un traitement empirique pour décrire le phénomène.

La pratique en ingénierie veut qu'on fasse usage de l'équation de Darcy-Weisbach pour évaluer les pertes linéaires.

$$h_L=f\frac{L}{d}\frac{\overline{v}^2}{2g}$$

Comme il a déjà été mentionné, la difficulté réside dans la détermination du coefficient de friction $f$. Beaucoup d'efforts ont été consentis depuis le milieu du XIX[e] siècle afin de caractériser de façon empirique les écoulements et plus particulièrement, les écoulements turbulents (l'équation de Darcy-Weisbach date de cette période). Plusieurs formulations plus ou moins heureuses ont été proposées pour évaluer $f$. Suite aux travaux de Nikuradse qui ont fait époque (1933), Colebrooke et White ont développé en 1939 une formulation mathématique qui est encore employée aujourd'hui. Ces derniers ont proposé la formule suivante (appelée formule de Colebrooke) afin de calculer $f$.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{f}}=-2,0\log\left(\frac{\varepsilon/d}{3,7}+\frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)} \qquad (6\text{-}21)$$

Notons que l'équation (6-21) est implicite en $f$ ($f$ ne peut être isolé). Sa résolution pour $f$ doit donc passer par l'emploi de méthodes numériques. À l'époque, plusieurs approximations de (6-21) ont été développées pour contourner cette difficulté mais la prévalence aujourd'hui des calculateurs symboliques a désormais rendu ces procédés désuets. L'analyse du comportement de $f$ prédit par

(6-21) n'est pas simple a priori. Le diagramme de Moody reproduit à la figure 6.7 permet toutefois de se faire une idée générale.

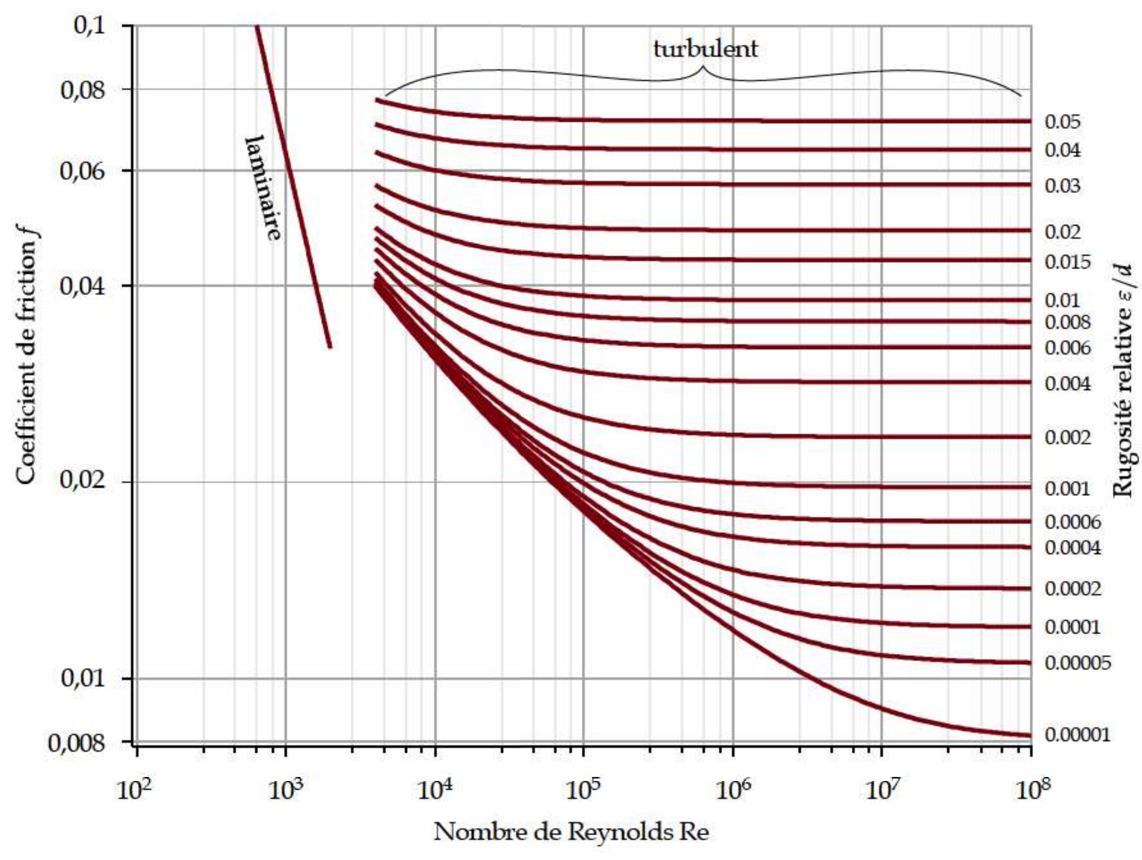



**Figure 6.7** Diagramme de Moody

D'emblée, remarquons que la droite de pente -1 représente la relation de l'équation (6-20) pour les écoulements laminaires. Les autres courbes montrent comment varie $f$ en fonction du nombre Reynolds pour différentes valeurs de la rugosité relative. On observe que pour toutes ces courbes, le coefficient de friction devient indépendant du nombre de Reynolds pour des valeurs suffisamment grandes de Re (la courbe devient horizontale). À partir de ces valeurs de Re, on constate que la seule grandeur qui affecte $f$ est la rugosité relative. En effet, si on fait tendre Re vers l'infini dans (6-20), on est conduit à la formule de Von Karman qui exhibe le comportement que nous venons de décrire.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0\log\left(\frac{\varepsilon/d}{3{,}7}\right)$$

*Profil de vitesse en situation d'écoulement turbulent*

Le mélange caractéristique de la turbulence a tendance à homogénéiser les propriétés de l'écoulement à travers la section de passage. Il en va de même, à une distinction importante près, de la vitesse d'écoulement. La condition de non-glissement impose que la vitesse s'annule à la paroi mais la turbulence à l'uniformiser à travers la conduite. On est donc conduit à un profil de vitesse qui présente l'allure illustrée à la figure 6.8.

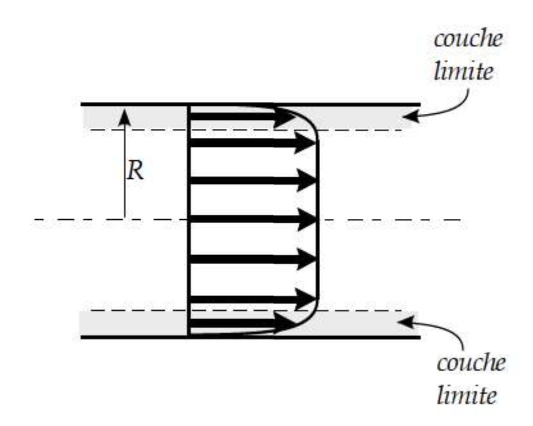



**Figure 6.8** Écoulement turbulent : profil de vitesse et couche limite

La vitesse est essentiellement uniforme sur la part la plus importante de la section de passage. Toutefois, dans une région très mince appelée couche limite, elle varie très rapidement pour devenir zéro à la paroi. Plusieurs modélisations mathématiques de ce phénomène ont été proposées. Dans le cadre de ce texte, toutefois, nous négligerons l'effet de la couche limite pour les besoins de nos calculs et considérerons que l'écoulement est uniforme. En conséquence, il vient :

$$\overline{v} = v_c \tag{6-22}$$

et

$$\alpha = 1 \tag{6-23}$$

**Exemple 6.4 :** Le réservoir de la figure 6.9 se vide à travers la conduite de 10 cm de diamètre et de rugosité $\varepsilon$ = 0,2 mm. Le fluide en écoulement est de l'eau à 20 °C qui débouche à l'atmosphère avec un débit de 0,05 m³/s. Calculez la hauteur $a$ de l'eau dans le réservoir

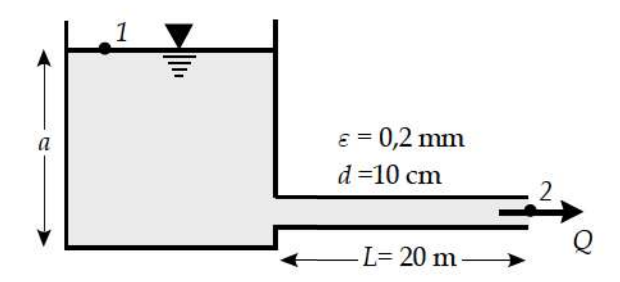



**Figure 6.9** Exemple 6.4

*Solution*

Notons que pour de l'eau à 20 °C, $\rho = 998\ \text{kg/m}^3$ et $\nu = 1 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/s$

Équation d'énergie : $H_1 = H_2 + h_{1-2}$

$$z_1 = a = \alpha_2 \frac{\overline{v}_2^{\,2}}{2g} + h_L$$

$$\overline{v}=\frac{Q}{A}=6{,}366 \text{ m/s}$$

et $$\text{Re}=\frac{\overline{v}d}{\nu}=636620 \qquad \text{(turbulent, alors } \alpha_2=1\text{ )}$$

or : $$h_L=f\frac{L}{d}\frac{\overline{v}_2^{\,2}}{2g}$$

avec : $$\frac{1}{\sqrt{f}}=-2{,}0\log\left(\frac{\varepsilon/d}{3{,}7}+\frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

Après avoir introduit les valeurs pour $\varepsilon/d$ et Re dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=-2{,}0\log\left(0{,}000\overline{540}+\frac{1{,}97135\times10^{-5}}{\sqrt{f}}\right)$$

alors, résolvant pour $f$ : $$f=0{,}0237 \quad \text{et} \quad h_L=f\frac{L}{d}\frac{\overline{v}_2^{\,2}}{2g}=9{,}796 \text{ m}$$

donc : $$a=\frac{\overline{v}_2^{\,2}}{2g}+h_L=\frac{(6{,}366)^2}{2*9{,}81}+10{,}235=11{,}86 \text{ m}$$

### 6.5.3 Résumé des résultats des sections 6.5.1 et 6.5.2

*Écoulements laminaires*

$$h_L=\frac{128\mu L}{\pi\rho g d^4}Q=\frac{32\nu L}{gd^2}\overline{v}$$

ou encore: $$h_L=f\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} \text{ avec } f=\frac{64}{\text{Re}}$$

$$v(r)=v_c\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

alors : $$\overline{v}=\frac{v_c}{2} \quad \text{et} \quad \alpha=2$$

*Écoulements turbulents*

$$h_L=f\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\sqrt{f}}=-2{,}0\log\left(\frac{\varepsilon/d}{3{,}7}+\frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

$$v(r)=Cte$$

alors : $$\overline{v}=v_c \quad \text{et} \quad \alpha=1 \ .$$

## 6.6 Pertes singulières

Tous les systèmes de tuyauterie comportent des éléments comme des coudes, des valves ou des entrées et sorties qui perturbent l'écoulement (les lignes de courant) et peuvent introduire de la turbulence locale. La figure ci-dessous illustre comment sont affectées les lignes de courant et comment est produite de la turbulence lors d'un changement subit de la section d'une conduite.

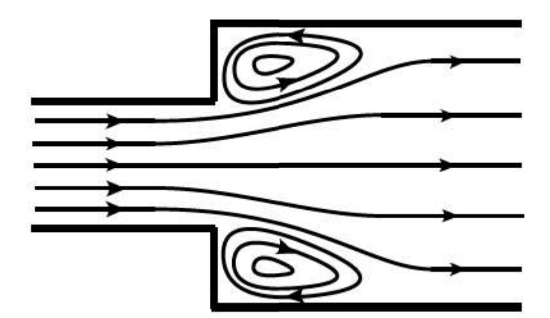


**Figure 6.10** Génération de turbulence à une singularité

Ce phénomène retire de l'énergie de l'écoulement; quand bien même ce ne serait que l'énergie cinétique nécessaire au maintien du tourbillon. La présence de ces éléments contribuera donc au terme de pertes $h_{1-2}$. Ces pertes, dites *pertes singulières*, dépendent du débit et de la façon que l'écoulement est dévié, c'est-à-dire de l'élément perturbateur appelé singularité. L'expérience montre que souvent ces pertes sont proportionnelles au carré de la vitesse et donc qu'on peut écrire :

$$h_S = K\frac{\overline{v}^2}{2g} \tag{6-24}$$

où $h_S$ désigne la perte de charge associée à la singularité de coefficient *K*. Au sens strict, *K* peut dépendre du débit (de la vitesse moyenne, donc) mais nous le considérerons ici constant. Sa grandeur dépend évidemment de la singularité elle-même et il est très difficile de faire des prédictions quant à celle-ci : un robinet complètement ouvert, par exemple, ne se comportera pas de la même façon qu'ouvert à moitié. À un robinet fermé on associera un coefficient de singularité infini. Si l'entrée et la sortie de la singularité présentent des sections différentes (donc des vitesses moyennes différentes), nous conviendrons que nous utiliserons la vitesse moyenne à l'entrée aux fins de l'emploi de (6-24). L'entrée d'un réservoir constituera, cela va de soi, l'exception. Le tableau 6.2 présente des valeurs représentatives de *K* pour différentes singularités. Comme il a été mentionné, ces coefficients peuvent varier de façon appréciable d'une situation à l'autre. Nous conviendrons que dans le contexte d'un problème donné, les valeurs des coefficients seront spécifiées à moins que le propos du problème soit d'en déterminer la grandeur (voyez l'exemple 6.5).

| Singularité | Coefficient de singularité, $K$ |
|---|---|
| Valve à barrière* | 0,25 |
| Valve à globe* | 10 |
| Valve sphérique* | 0,1 |
| Entrée encastrée | 0,9 |
| Entrée à arêtes vives | 0,4 |
| Entrée profilée | 0,05 |
| Coude 90° | 0,9 |
| Coude 45° | 0,4 |
| Sortie | 1,0 |
| Angle 90° | 1,1 |

* : Complètement ouverte

**Tableau 6.2** Exemples de coefficients de singularité

**Exemple 6.5** Un tuyau comporte une valve de coefficient de singularité $K = 6$. De combien chute la pression entre l'entrée et la sortie de la valve si l'écoulement d'eau ($\rho = 1000$ kg/m³) se fait à la vitesse de 1,5 m/s?

*Solution*

Équation d'énergie : $$H_1 = H_2 + h_{1-2}$$

Les points 1 et 2 sont à la même élévation et présentent la même vitesse moyenne alors :

$$\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + h_S \ .$$

Les points se trouvant immédiatement avant et après la valve, $h_L = 0$ et $h_{1-2} = h_S$ ainsi :

$$P_1 - P_2 = \rho g h_s$$

Or : $$h_s = K\frac{\overline{v}^2}{2g} = 6\frac{1,5^2}{2*9,81} = 0,6881 \text{ m}$$

Et : $$P_1 - P_2 = \rho g h_s = 6750 \text{ Pa}$$

Souvent, plusieurs singularités vont occasionner des pertes entre les points considérés. De façon générale, alors, on aura :

$$h_{ST} = \sum_i h_{Si} \tag{6-25}$$

où $h_{ST}$ désigne les pertes totales de singularité et $h_{Si}$, les pertes de charge associées à la $i^{ème}$ singularité. Toutefois, si le diamètre de la conduite ne varie pas entre les deux points et qu'en conséquence la vitesse moyenne reste constante, le résultat (6-25) devient :

$$h_{ST} = \sum_i h_{Si} = \sum_i K_i \frac{\overline{v}^2}{2g} = K_T \frac{\overline{v}^2}{2g} \tag{6-26}$$

où :
$$K_T = \sum_i K_i \tag{6-27}$$

Si, entre les points considérés, des pertes linéaires et des pertes singulières affectent la hauteur de charge, les pertes totales $h_{1-2}$ seront données par (6-5).

$$h_{1-2} = \sum h$$

alors :
$$h_{1-2} = \sum_i h_{Li} + \sum_j h_{Sj}$$

où $h_{Li}$ désigne les pertes de charge associées à la i$^{\text{ème}}$ conduite et $h_{Sj}$ désigne les pertes de charge associées à la j$^{\text{ème}}$ singularité

**Exemple 6.6** De l'eau à 10 °C s'écoule entre deux réservoirs à travers une conduite d'acier ($\varepsilon = 0{,}2$ mm) de 40 mm de diamètre et de longueur totale $L$=20 m. Les 6 coudes présentent un coefficient de singularité de 1,2 chacun tandis que l'entrée et la sortie ont des coefficients respectifs de 1 et 0,5. Calculez le débit volumique et établisez la puissance dissipée sous formes de pertes.

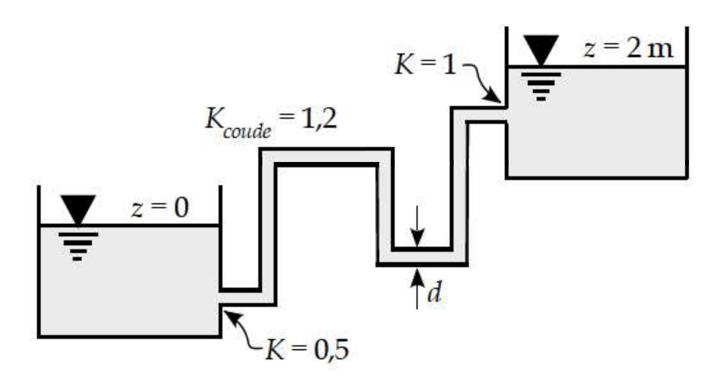



**Figure 6.11** Exemple 6.5

*Solution*

Pour de l'eau à 10 °C, $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$ et $\nu = 1{,}31\times10^{-6}\ \text{m}^2/s$. Prenant le sommet du réservoir le plus élevé comme point 1, et le haut de l'autre réservoir comme point 2,

$$H_1 = H_2 + h_{1-2}$$

où
$$H_1 = z_1\ ,\ H_2 = z_2 \text{ et } h_{1-2} = h_L + h_S$$

alors :
$$z_1 = z_2 + h_L + h_S$$
$$2 = h_L + h_S \tag{E 6.5-1}$$

Comme la vitesse moyenne n'est pas connue (on cherche le débit), on ne sait pas d'emblée si l'écoulement est laminaire ou turbulent. Il faudra fonctionner par hypothèse. Le nombre de Reynolds s'écrit :

$$\mathrm{Re} = \frac{\overline{v}d}{\nu} = 30534,4\,\overline{v} \qquad \text{(E 6.6-2)}$$

Ainsi, pour que l'écoulement soit laminaire (Re < 2000), il faut que la vitesse moyenne soit inférieure à 1/15 m/s. On s'attend donc, plutôt, à un écoulement turbulent. Faisons abstraction de ce fait et faisons l'hypothèse d'un écoulement laminaire.

*Hypothèse : écoulement laminaire.*

Donc :

$$h_L = \frac{32\nu L}{gd^2}\overline{v} = 0,0534\,\overline{v} \qquad \text{(E 6.6-3)}$$

Par ailleurs :

$$h_S = K_T\frac{\overline{v}^2}{2g} = (6*1,2+1+0,5)\frac{\overline{v}^2}{2*9,81} = 0,4434\,\overline{v}^2 \qquad \text{(E 6.6-4)}$$

Insérant ((E 6.6-3) et (E 6.6-4) dans (E 6.6-1), on trouve :

$$2 = 0,0534\overline{v} + 0,4434\overline{v}^2$$

ou encore :

$$0,4434\overline{v}^2 + 0,0534\overline{v} - 2 = 0 \qquad \text{(E 6.6-5)}$$

c'est-à-dire, une forme quadratique en $\overline{v}$ . On sait résoudre ce genre d'équation; il vient :

$$\overline{v} = \text{-}2,185 \quad \text{ou} \quad 2,064 \ \ \mathrm{m/s}$$

$\overline{v}$ représente la **grandeur** de la vitesse moyenne et ne peut donc être négative.

Alors, $\overline{v} = 2,064$ m/s et Re = 63023 > 2000.

L'écoulement n'est donc pas laminaire et l'hypothèse doit être rejetée.

*Écoulement turbulent*

$$h_L = f\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} = 25,48\,f\overline{v} \qquad \text{(E 6.6-6)}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0\log\left(\frac{\varepsilon/d}{3,7} + \frac{2,51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad \text{(E 6.6-7)}$$

Insérant ((E 6.6-4) et (E 6.6-6) dans (E 6.6-1), on trouve :

$$2 = f\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} + K_T\frac{\overline{v}^2}{2g}$$

$$2 = (25,45f + 0,4434)\overline{v}^2$$

c'est-à-dire :
$$\overline{v} = \sqrt{\frac{2}{25,45f + 0.4434}} \qquad \text{(E 6.6-8)}$$

On remarque que à l'opposé de précédemment, on ne peut résoudre immédiatement pour $\overline{v}$. En effet, $f$ nécessite pour sa détermination la grandeur de Re qui lui-même dépend de la vitesse moyenne. On se construit donc une expression de Re fonction de $f$:

$$\text{Re} = 30534,4\,\overline{v} = 30534,4\sqrt{\frac{2}{25,45f + 0.4434}}$$

Ce dernier résultat peut maintenant être introduit dans la formule de Colebrooke ((E 6.6-7)).

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{.02}{3.7 * 40} + \frac{2.51}{30534,4\sqrt{\dfrac{2f}{25,45f + 0.4434}}}\right)$$

Cette équation ne dépend plus que de $f$; elle peut être résolue. On trouve :

$f = 0,0327$

Alors : $\overline{v} = 1,252 \text{ m/s}$

L'écoulement est bien turbulent : Re = 38224 > 4000

Finalement : $Q = \overline{v}A = 0,00157 \text{ m}^3 / s$

La puissance est dissipée sous forme de pertes.

$$\dot{W}_{pertes} = \dot{m}gh_{1-2} = \dot{m}g(h_L + h_S)$$

$$h_L = 25,48\, f\overline{v} = 1,305 \text{ m} \qquad h_S = 0,4434\,\overline{v}^2 = 0,695 \text{ m}$$

alors : $\dot{W}_{pertes} = \rho g Q(h_L + h_S) = 30,8 \text{ W}$

*Remarques finales sur l'exemple 6.6*

Souvent le problème à résoudre consiste à déterminer la vitesse moyenne. Les démarches employées dans le cadre de la solution de cet exemple sont-elles représentatives? Remarquons un fait d'abord. En absence de pompe ou de turbine, l'équation d'énergie (6-4) s'écrit :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1\frac{\overline{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2\frac{\overline{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_L + h_S$$

Notons que pour ce type de problème tout est connu à l'exception des différentes vitesses. Ces dernières peuvent toutes être exprimées en termes de l'une de celles-ci, disons $\overline{v}_x$. Alors la forme la plus générale que prend l'équation d'énergie dans ces circonstances est la suivante :

$$C_1 + C_2\overline{v}_x{}^2 + h_L = 0 \tag{6-28}$$

où $C_1$ regroupe tous les termes constants, c'est-à-dire $\frac{P_1}{\rho g}$, $\frac{P_2}{\rho g}$, $z_1$ et $z_2$ ;

et $C_2$ est le facteur qui accompagne les différents termes proportionnels aux différentes vitesses toutes exprimées en fonction de $\overline{v}_x$, à savoir : $\alpha_1\frac{\overline{v}_1^2}{2g}$, $\alpha_2\frac{\overline{v}_2^2}{2g}$ et $h_S = K_T\frac{\overline{v}^2}{2g}$.

L'équation (6-28) prendra deux formes selon que l'écoulement est laminaire ou turbulent.

1) Écoulement laminaire

alors : $h_L = \frac{32\nu L}{gd^2}\overline{v} = C_3\overline{v}_x$

et l'équation (6-28) devient : $C_1 + C_2\overline{v}_x{}^2 + C_3\overline{v}_x = 0$

On est donc en présence d'une équation quadratique en $\overline{v}_x$ comme ça été le cas de l'équation (E 6.6-5).

2) Écoulement turbulent

alors : $h_L = f\frac{L}{d}\frac{\overline{v}^2}{2g} = C_4 f\,\overline{v}_x{}^2$

et l'équation (6-28) devient : $C_1 + C_2\overline{v}_x{}^2 + fC_4\overline{v}_x{}^2 = C_1 + (C_2 + fC_4)\overline{v}_x{}^2 = 0$

ou encore : $\overline{v}_x = \sqrt{\frac{C_1}{(C_2 + fC_4)}}$

c'est-à-dire la forme de l'équation (E 6.6-8) de l'exemple précédent.

En conclusion, on peut affirmer que les démarches utilisées à l'exemple 6.6 sont tout à faites représentatives de ce qu'il faudrait faire afin de résoudre un problème de ce type et la solution présentée peut servir de guide général.

## 6.7 EXERCICES

**Problème 1** La seringue de la figure P 6.1 contient de l'eau à 20 °C et est munie d'un piston qui est déplacé à la vitesse de 1 cm/s. Négligeant les pertes occasionées par la constriction, calculez la chute de pression ($P_1 - P_2$). Considérez l'écoulement complètement développé en 1 et 2.

Rép. : $(P_1 - P_2) = 951{,}2$ Pa

**Problème 2** Une huile de lubrification est en écoulement comme le montre la figure P 6.2. La conduite à travers laquelle s'effectue l'écoulement a un diamètre de 1,0 cm et une longueur de 1,2 m. La viscosité cinématique est de $1{,}5 \times 10^{-5}$ m$^2$/s. Trouvez le débit dans la conduite.

Rép. : $Q = 3{,}845 \times 10^{-5}$ m$^3$/s

**Problème 3** Du kérosène à 20 °C est en écoulement dans une conduite inclinée vers le bas à un angle de $10^0$ par rapport à l'horizontale. La pression dans la conduite chute de 20 Pa sur une longueur de 4 m et un débit de 1,0 L/min. Trouvez le diamètre interne de la conduite.

Rép. : $d = 5{,}52$ mm

**Problème 4** Le dispositif de la figure P 6.4 est constitué de deux conduites de 5 cm de diamètre et de longueurs $L_1$ et $L_2$ séparées par une valve. Entre les points $A$ et $B$, la pression chute de 91,303 kPa et le débit d'eau à 10 °C est de 0,008 m$^3$/s.

a) Établissez la grandeur totale des pertes.

b) Calculez les pertes linéaires dans chacune des conduites.

c) Établissez le coefficient de singularité $K$ de la valve.

Rep. : a) $h = 9{,}307$ m

b) $h_{L1} = 1{,}015$ m; $h_{L2} = 1{,}523$ m

c) $K = 8$

**Problème 5** De l'eau à 90 °C s'écoulant à partir d'un réservoir à travers une conduite en acier de rugosité $\varepsilon$ = 0, 046 mm (figure P 6.5). Négligeant les pertes à l'entrée et à la sortie de la conduite, calculez le débit $Q$.

Rép. : $Q = 9{,}05 \times 10^{-6}$ m³/s.

**Problème 6** Le fluide de la figure P 6.5 a été changé. Il présente une masse volumique de 998 kg/m³ mais on ne connaît pas sa viscosité. Sachant que l'écoulement est laminaire et que le débit est de $5{,}10 \times 10^{-6}$ m³/s, établissez la viscosité cinématique.

Rép. : $\nu = 4{,}78 \times 10^{-6}$ m²/s

**Problème 7** Un fluide s'écoule à travers deux conduites de même longueur $L$ disposées à la suite l'une de l'autre (voyez la figure P 6.7). L'écoulement est laminaire. La chute de pression dans la première conduite de diamètre $d$ est 1,24 fois plus grande que la chute de pression dans la seconde conduite. Déterminez le diamètre $D$ de la deuxième conduite.

Rép. : $D = 1{,}055\, d$

**Problème #8** Une huile de densité 0,87 et de viscosité cinématique $1{,}2 \times 10^{-4}$ m²/s est en écoulement à travers une conduite verticale de 20 mm de diamètre (figure P 6.8).

a) Sachant que le débit est de $4 \times 10^{-4}$ m³/s, déterminez le paramètre $h$ et $P_A - P_B$.

b) Si le débit est maintenant de $2 \times 10^{-4}$ m³/s, répondez aux questions de a).

c) Quel doit être le débit si on veut que les pressions en $A$ et $B$ soient les mêmes?

Rép. : a) $h$ = 34,06 cm; $P_A - P_B$ = - 8,4 kPa

b) $h$ = 17,03 cm; $P_A - P_B$ = +12,87 kPa

c) $Q = 3{,}21 \times 10^{-4}$ m³/s.

**Problème 9** De la glycérine à 20 °C est en écoulement à travers une conduite verticale de 10 m de longueur et de 75 mm de diamètre. La vitesse au centre de 1,0 m/s, la viscosité cinématique est de $10^{-3}$ m²/s et la masse volumique est de 1300 kg/m³. Si l'écoulement se fait vers le haut, déterminez :

a) la perte de charge dans la conduite.

b) la chute de pression dans la conduite.

Rép. : a) $h$ =2,9 m

b) $\Delta P$ = 164,5 kPa

**Problème 10** De l'eau à 20 °C est siphonnée d'un bassin d'irrigation vers un autre bassin par le biais d'une conduite de 50 mm de diamètre et de longueur 1,8 m comme l'indique la figure P 6.10. La rugosité absolue de la conduite est de 0,20 mm. Les coefficients de singularité de l'entrée, des coudes ainsi que de la sortie sont spécifiés sur la figure. Déterminez le débit de l'eau dans la conduite.

Rép. : $Q = 1{,}63 \times 10^{-3}$ m³/s.

**Problème 11** La figure P 6.11 montre une turbine alimentée en eau par un bassin disposé 27 m plus haut. La conduite d'amenée d'eau d'un diamètre de 30,5 cm et d'une longueur de 91,5 m présente un coefficient de friction de 0,02. Si la turbine extrait
37,5 kW de l'écoulement, calculez le débit.

Rép. : $Q$ = 0,55 m³/s ou $Q$ = 0,15 m³/s

**Problème 12** De l'eau à 10 °C est en écoulement entre deux réservoirs à travers une conduite de 20 m de longueur totale et de rugosité absolue $\varepsilon$ = 0,26 mm (figure P 6.12). Le débit d'eau est de 0,002 m³/s. Le système comporte 6 coudes de coefficient 1,5, chacun. Déterminez le diamètre de la conduite.

Rép. : $d$ = 45 mm

**Problème 13** Deux réservoirs d'eau à 20 °C sont reliés par une conduite d'acier galvanisé de 21 m. Le réservoir du haut est ouvert à l'atmosphère et celui du bas est soumis à une pression relative de 70 kPa (voyez la figure P 6.13). On néglige les pertes de singularité. Déterminez le sens de l'écoulement et calculez le débit volumique.

Rép. : de $B$ vers $A$ et $Q = 1{,}53 \times 10^{-2}$ m³/s.

**Problème 14** La pression $P_A$ du réservoir de la figure P 6.14 est requise afin de maintenir un débit de 0,14 m³/s à travers la conduite de 200 mm de diamètre. Le fluide est de l'eau à 10 °C, la conduite est en fonte ($\varepsilon = 0{,}26$ mm) et la sortie s'effectue à l'air libre.

a) Calculez $P_A$.

b) Calculez la pression au point $B$, situé <u>immédiatement</u> après le coude.

Rép. : a) $P_A = 1{,}423$ MPa
b) $P_B = 211{,}73$ kPa

**Problème 15** La pompe $P$ de la figure P 6.15 fournit une puissance de 50 kW causant ainsi un écoulement de 0,04 m³/s. Calculez le nouveau débit si la pompe est retirée du système. Considérez que le coefficient de friction de la conduite est $f = 0{,}016$ et que les coefficients de singularité de l'entrée et de la sortie sont respectivement de 0,5 et 1.

Rép. : $Q = 0{,}0151$ m³/s

**Problème 16** Lorsque le robinet est fermé, l'eau s'écoule de $A$ vers $B$ tel qu'illustré à la figure 11. Quel est le débit d'eau dans le réservoir $B$ si le robinet est ouvert et l'eau s'écoule aussi vers $C$. Négligez toutes les pertes de singularité et considérez $f = 0{,}02$ pour toutes les conduites.

Rép. : $Q = 1{,}8 \times 10^{-2}$ m³/s

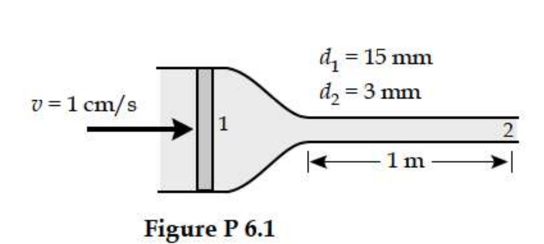



Figure P 6.1

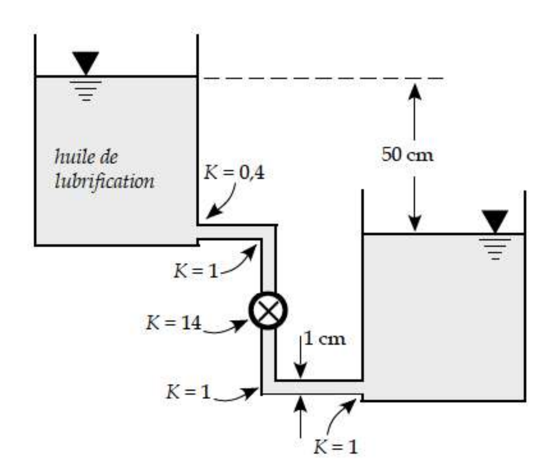



Figure P 6.2

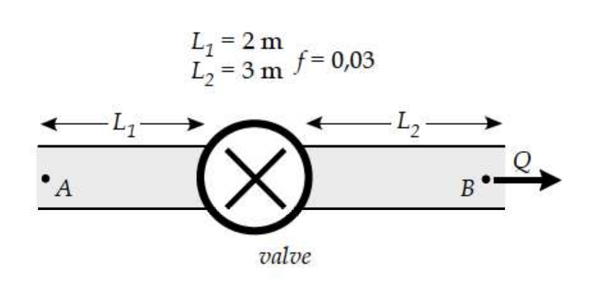



Figure P 6.4

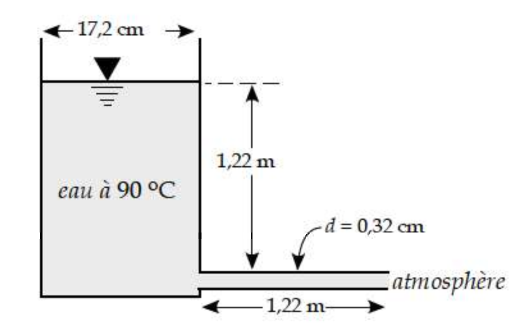



Figure P 6.5

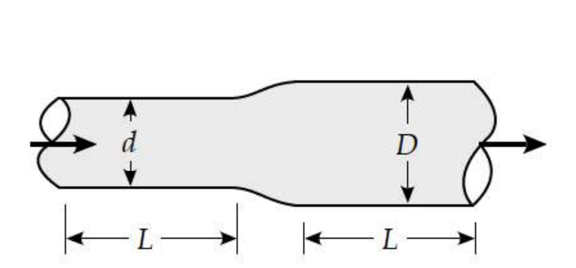



Figure P 6.7

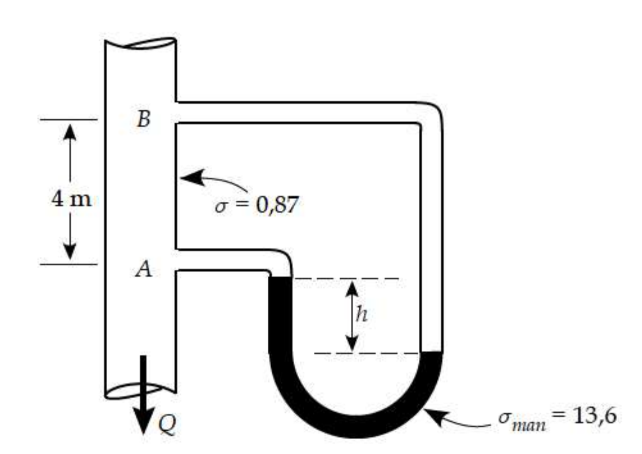



Figure P 6.8

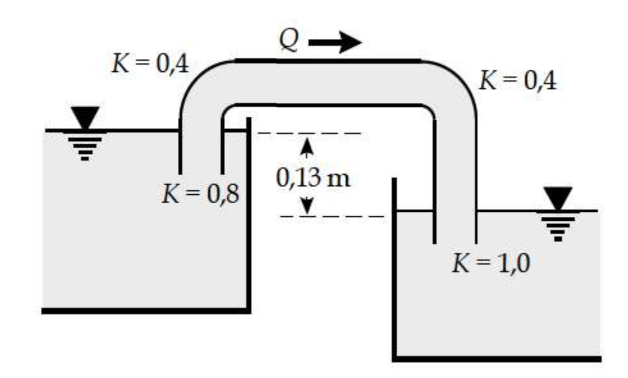



Figure P 6.10

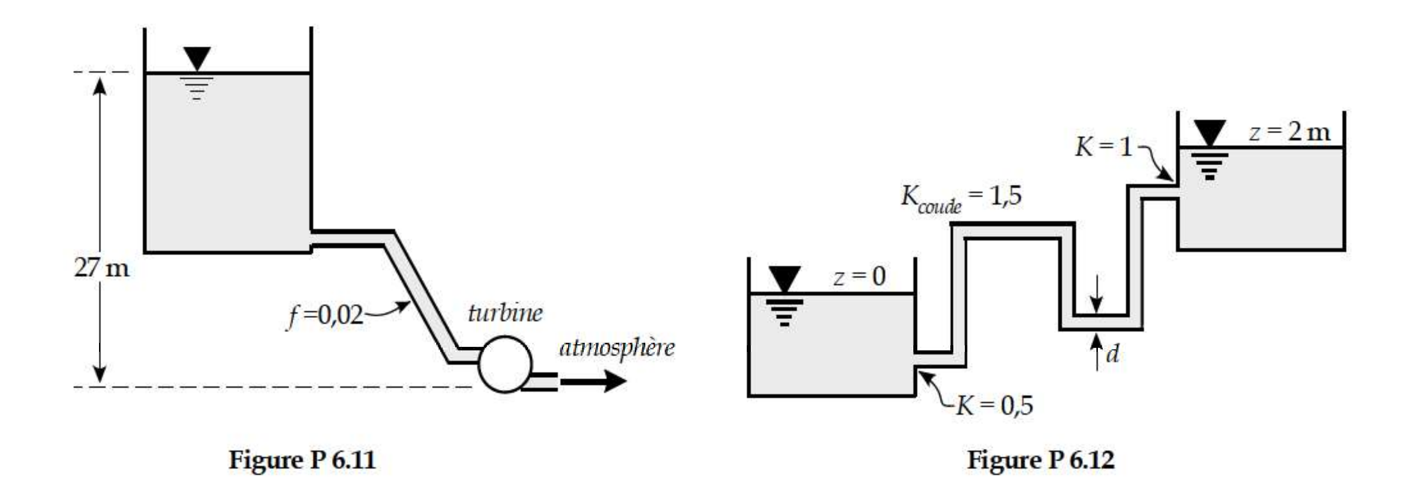



Figure P 6.11

Figure P 6.12

A
3 m
$P_B$ = 70 kPa
B
d = 75 mm
ε = 0,15 mm
L = 21 m

Figure P 6.13

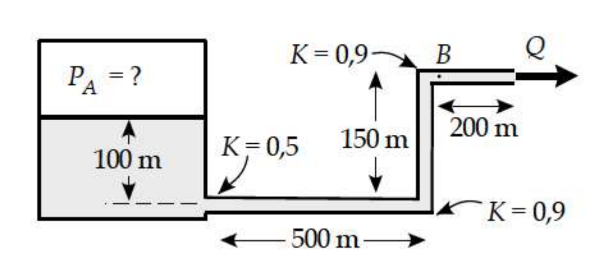



Figure P 6.14

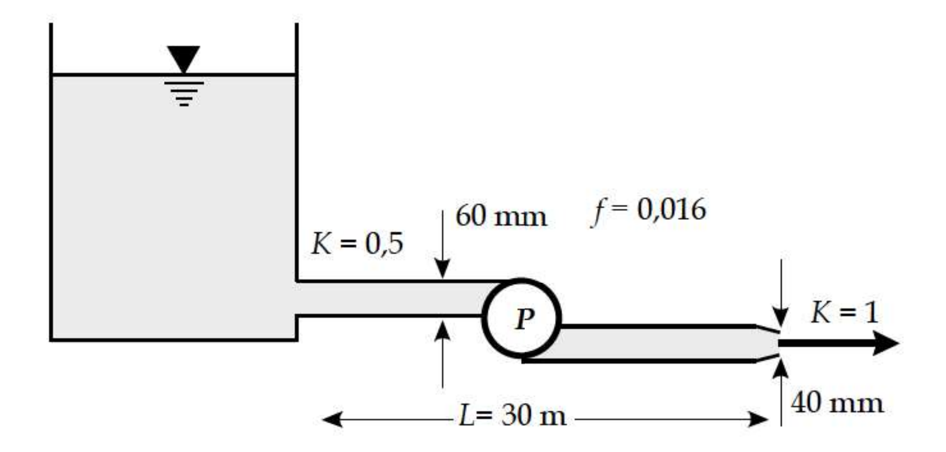



**Figure P 6.15**

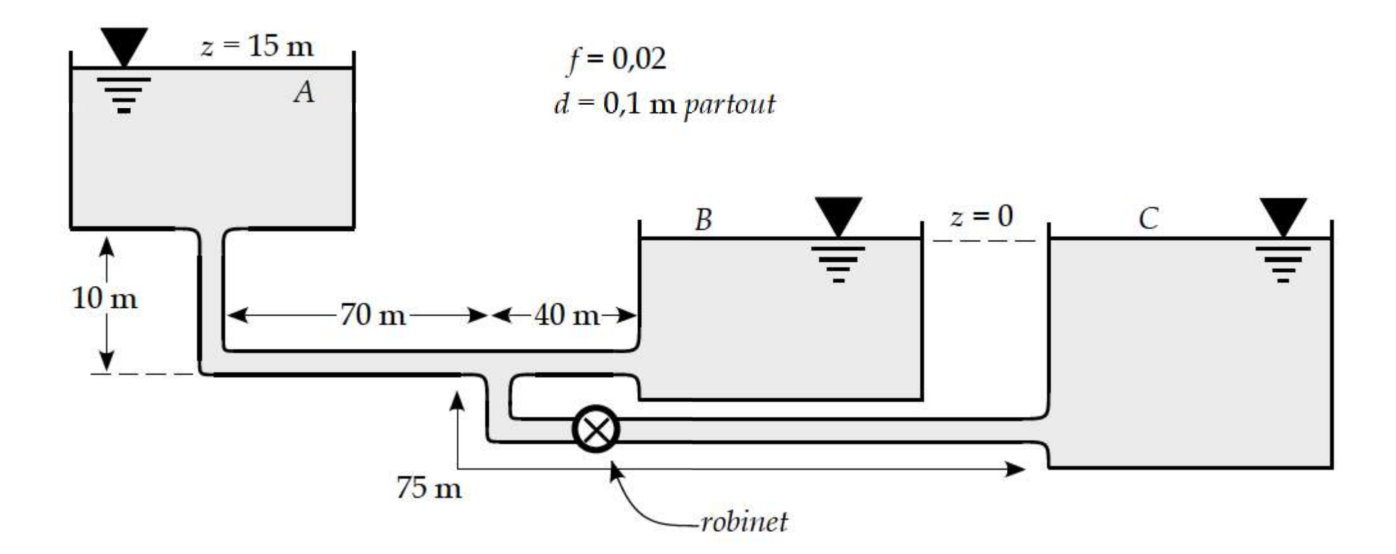



**Figure P 6.16**

## 6.8 ANNEXE A1 : Analyse dimensionnelle

### 6.8.1 Les bases de l'analyse dimensionnelle

Bien que plusieurs problèmes en mécanique des fluides puissent être résolus de façon analytique à partir de principes physiques de base, il existe un grand nombre de problèmes qui ne peuvent être traités qu'à partir de données expérimentales. Ainsi, les ingénieurs travaillant en mécanique des fluides doivent être familiers avec une approche empirique qui leur permet d'interpréter les données expérimentales et d'en déduire un modèle général. Pour ce faire, l'analyse dimensionnelle se révèle un outil de premier choix. Plusieurs livres ont été publiés uniquement sur ce sujet. Nous nous contenterons ici d'illustrer cette démarche à l'aide d'exemples.

Fondamentalement, l'analyse dimensionnelle est une méthode permettant de réduire le nombre de variables expérimentales dont dépend un phénomène physique quelconque, en utilisant une technique de « compactage » des variables expérimentales. Si un phénomène dépend de $n$ variables, l'analyse dimensionnelle permet de réduire la complexité du problème à $k$ variables adimensionnelles (sans unité) où la réduction du nombre de variables, $n-k$, est généralement égale au nombre d'unité de base nécessaire pour décrire le problème.

D'un point de vue pratique, le premier avantage de l'analyse dimensionnelle est de réduire sensiblement le nombre de données expérimentales nécessaire pour caractériser un phénomène physique, donc de sauver du temps et de l'argent. Un deuxième avantage de l'analyse dimensionnelle est de fournir une loi d'échelle qui permet de convertir des données obtenues à partir d'une maquette réduite (celle d'un barrage, ou d'un avion) à un prototype réel. Ce deuxième aspect de l'analyse dimensionnelle ne sera pas abordé dans ce texte.

Illustrons la technique de « compactage » des variables expérimentales à l'aide d'un exemple simple. Un problème important en mécanique des fluides est d'exprimer les pertes d'énergie massiques linéaires, $gh_L$, en fonction des différents paramètres de l'écoulement. La première étape consiste à énumérer toutes les variables qui sont susceptibles d'affecter ce terme. Typiquement, ces variables devraient inclure des paramètres géométriques (diamètre et longueur de la conduite), des paramètres caractérisant les propriétés du fluide (masse volumique, viscosité) ainsi que des paramètres caractérisant la nature de l'écoulement (vitesse de l'écoulement). Ainsi, $g\,h_L$, pour une conduite lisse peut être exprimée comme suit :

$$g\,h_L = F\left(d, L, \rho, \mu . \overline{v}\right) \tag{A1-6-1}$$

où $F$ est une fonction quelconque que l'on cherche à déterminer expérimentalement.

La deuxième étape consiste à exprimer chacun des termes ci-dessus en fonction de leur dimension de base. Ainsi,

$$[gh_L] = L^2T^{-2}$$
$$[d] = L$$
$$[L] = L$$
$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$$
$$[\overline{v}] = LT^{-1}$$

où $L, M$ et $T$ représentent respectivement les dimensions d'une longueur, d'une masse et d'un temps.

### 6.8.2 Le théorème pi

Pour une équation physique quelconque impliquant $n$ variables telles que

$$u_1 = F(u_2, u_3 \ldots, u_n)$$

le théorème *pi* stipule que les termes de cette équation peuvent être réarrangés de telle sorte que

$$\pi_1 = \varnothing(\pi_2, \pi_{3,} \ldots, \pi_{n-k}) \qquad \text{(A1-6-2)}$$

où les termes $\pi$ sont des combinaisons adimensionnelles des variables de base, $u$. Le nombre de termes $\pi$ correspond au nombre de variables initiales, $n$, moins le nombre de dimensions nécessaires pour décrire ces variables, $k$. Si on reprend l'exemple de la section précédente, $n = 6$ et $k = 3$. La troisième étape de l'analyse dimensionnelle consiste à déterminer le nombre de termes *pi* nécessaires. Ainsi, pour l'équation (A1-6-1), on a $n = 6$ et $k = 3$. On obtient donc :

$$\pi_1 = \varnothing(\pi_2, \pi_3)$$

où $\varnothing$, encore une fois, est une fonction quelconque. La quatrième étape consiste à choisir parmi les variables de base, un nombre $r$ de variables répétitives. Ces variables sont choisies de telle sorte qu'elles soient dimensionnellement indépendantes les unes des autres (i.e. : les dimensions d'une variable répétitive ne peuvent être obtenues par une combinaison de produits de puissances, des autres variables répétitives). Pour des raisons pratiques, la variable dont on veut décrire le comportement $(gh_L)$ ne sera pas choisie comme variable répétitive. Utilisons la notation $x_i$ pour d'écrire les variables répétitives et $y_i$ pour les variables restantes. Si on choisit $d, \mu,$ et $v$ comme variables répétitives on peut écrire :

$$x_1 = d \; ; \; x_2 = \mu \; ; \; x_3 = \overline{v} \; ; \; y_1 = g\,h_L \; ; \; y_2 = L \; ; \; y_3 = \rho$$

La cinquième étape consiste à construire les termes *pi* en multipliant une des variables non répétitives par le produit de puissance des variables répétitives, tel que :

$$\pi_i = y_i x_1^{a_i} x_2^{b_i} x_3^{c_i}$$

où les exposants $a_{i,}\ b_i$ et $c_i$ sont déterminés de telle sorte que les termes $\pi_i$ soient sans dimension. Calculons ces termes pour l'exemple courant .

$$\pi_1 = gh_L \; d^a \mu^b \; \overline{v}^c$$

En analysant les dimensions de ce terme on obtient :

$$[\pi_1] = L^2\,T^{-2}\,L^a\,M^b\,L^{-b}\,T^{-b}\,L^c\,T^{-c}$$
$$= L^{(2+a-b+c)}\,M^b\,T^{(-2-b-c)}$$

Puisque l'exposant de chaque unité de base doit égaler zéro, on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} 2+a-b+c&=0 \\ b&=0 \\ -2-b-c&=0 \end{aligned}$$

La solution de ce système algébrique est donnée par $a=0$, $b=0$ et $c=-2$. Il en résulte que

$$\pi_1 = \frac{g h_L}{\overline{v}^2}$$

En répétant ce procédé pour les variables $L$ et $\mu$, on obtient les termes $pi$ suivants :

$$\pi_2 = \frac{L}{d}; \qquad \pi_3 = \frac{\rho\,\overline{v}\,d}{\mu} = \mathrm{Re}.$$

La dernière étape de l'analyse dimensionnelle consiste à exprimer la forme finale donnée par l'équation (A1-6-2). Ici, on obtient :

$$\frac{g\,h_L}{\overline{v}^2} = \varnothing\left[\frac{L}{d}, \mathrm{Re}\right] \qquad \text{(A1-6-3)}$$

### 6.8.3 Applications de l'analyse dimensionnelle

*Équations de Blasius*

En divisant arbitrairement l'équation (A1-6-3) par ½ on obtient :

$$\frac{g\,h_L}{\frac{1}{2}v^2} = \eta\left[\frac{L}{d}, \mathrm{Re}\right] \qquad \text{(A1-6-4)}$$

où $\eta$ est un multiple de la fonction $\varnothing$. L'équation (A1-6-4) est l'aboutissement de l'analyse dimensionnelle qui ne nous donne aucune information quant à la nature de la fonction $\eta$. La détermination de cette fonction relève de l'analyse des données expérimentales pour un problème à trois variables (au lieu de 6 variables, tel que présenté dans l'équation (A1-6-1)).

En mesurant $2gh_L/v^2$ en fonction de $\frac{L}{d}$ pour différentes valeurs de Re, on obtient une relation linéaire entre ces deux premiers termes de telle sorte que l'on peut écrire :

$$\frac{g\,h_L}{\frac{1}{2}v^2} = \frac{L}{d}\phi(\text{Re})$$

$$\frac{d\,g h_L}{\frac{1}{2}Lv^2} = \phi(\text{Re})$$

Encore une fois, l'analyse dimensionnelle ne nous donne aucune information quant à la nature de la fonction $\phi(\text{Re})$. Toutefois, en analysant des données expérimentales, on constate qu'une bonne estimation de ces données peut être obtenue par l'expression suivante :

$$h_L = 0.316\ \text{Re}^{-1/4}\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad \text{(A1-6-5)}$$

L'équation ci-dessus s'appelle l'équation de Blasius et est couramment utilisée pour calculer les pertes de charge dans les tuyaux lisses.

### *6.8.3.1 Coefficient de perte et coefficient de friction*

De façon générale, les pertes $h_L$ dépendent aussi de la rugosité de la conduite $\varepsilon$ en plus des autres variables énumérées dans l'équation (A1-6-1). En incluant $\varepsilon$ dont la dimension est celle d'une longueur aux paramètres de l'équation (A1-6-1), on obtient la relation suivante :

$$g\,h_L = f(L,d,\rho,\mu,\overline{v},\varepsilon) \qquad \text{(A1-6-6)}$$

En utilisant la méthode décrite dans la section précédente, on obtient les termes *pi* suivants :

$$\pi_1 = \frac{g\,h_L}{v^2}; \qquad \pi_2 = \frac{L}{d}; \qquad \pi_3 = \frac{\rho\overline{v}\,d}{\mu}; \qquad \pi_4 = \frac{\varepsilon}{d}.$$

Les termes de l'équation (A1-6-6) peuvent donc être réarrangés comme suit :

$$\frac{g\,h_L}{\frac{1}{2}\overline{v}^2} = \gamma\left(\frac{L}{d},\text{Re},\frac{\varepsilon}{d}\right) \qquad \text{(A1-6-7)}$$

où le terme $\pi_1$ a été multiplié par une constante et $\gamma$ est une fonction quelconque. Le coefficient de perte $K$ étant défini par

$$g\,h_L \equiv K\left[\frac{\overline{v}^2}{2}\right] \tag{A1-6-8}$$

on obtient à partir de (A1-6-7), l'expression suivante :

$$K = \gamma\left[\frac{L}{d}, \text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right] \tag{A1-6-9}$$

Comme dans la section précédente, on observe expérimentalement que les pertes dans une conduite sont toujours directement proportionnelles au rapport longueur-diamètre, de telle sorte que l'équation ci-dessus peut être simplifiée par l'expression suivante :

$$\gamma\left[\frac{L}{d}, \text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right] = \frac{L}{d}\psi\left[\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right] \tag{A1-6-10}$$

où $\gamma$ et $\psi$ sont des fonctions quelconques. Le paramètre adimensionnel défini par

$$f = \psi\left[\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right] \tag{A1-6-11}$$

est appelé coefficient de friction de Darcy. Il est fonction du nombre de Reynolds caractérisant la nature de l'écoulement ainsi que le rapport entre la rugosité et le diamètre de la conduite. La valeur de $\varepsilon$ dépend du type de matériau avec lequel la conduite est fabriquée et de son degré d'usure. Une table à la fin du chapitre donne des valeurs indicatives de $\varepsilon$ pour différents matériaux. En utilisant les équations (A1-6-7), (A1-6-10) et (A1-6-11) on obtient la relation suivante :

$$g h_L = f\left[\frac{L}{d}\right]\frac{\overline{v}^2}{2}$$

$$h_L = f\,\frac{L}{d}\frac{\overline{v}^2}{2g} \tag{A1-6-12}$$

L'équation (A1-6-12) est appelée équation de Darcy-Weisbach.

En combinant les équations (A1-6-5) et (A1-6-12), on obtient :

$$f = 0{,}316\ \text{Re}^{1/4} \tag{A1-6-13}$$

où $f$, pour les tuyaux lisses, ne dépend que du nombre de Reynolds.

## 6.9 ANNEXE A2 : Discussion sur les pertes et les pertes moyennes.

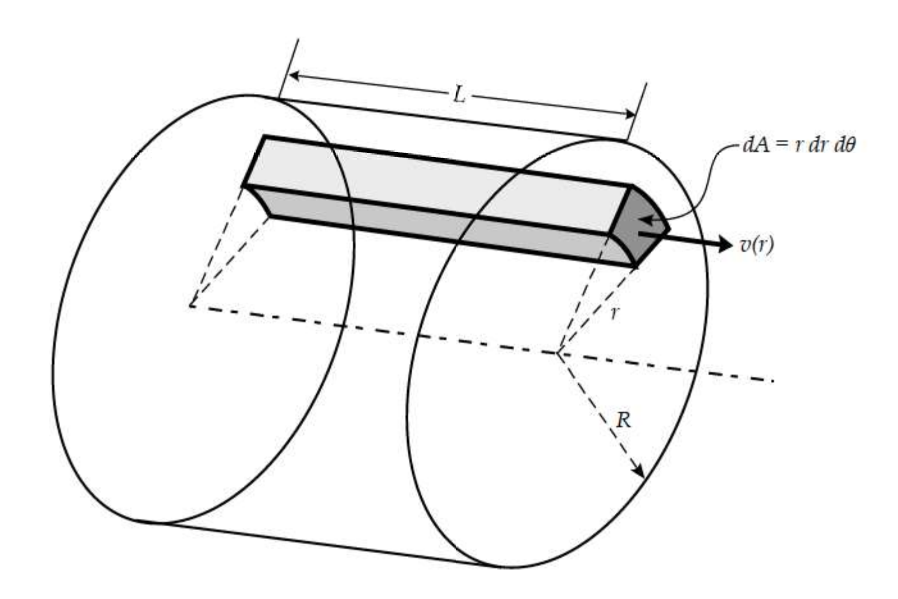
Ce qu'on appelle les « pertes » le long d'un tuyau de section constante correspond, en fait, à la moyenne des pertes associées à chacune des différentes lignes de courant joignant les « points » 1 et 2 d'un écoulement. Nous allons en faire la démonstration pour une conduite à section constante horizontale puisque c'est le seul cas pour lesquels on peut procéder à des prévisions sur l'ampleur de celles-ci. Pour la conduite inclinée, la chute de pression $\Delta P$ est simplement remplacée par $\Delta P^*$, la chute de pression piézométrique.

À titre de référence, rappelons que pour deux points d'un écoulement reliés par une ligne de courant,

$$gh_{1-2} = (u_2 - u_1) - q \tag{A2-6-1}$$

Par souci d'économie d'écriture, on écrira désormais $h$ pour $gh$.

On choisit comme système la matière à l'intérieur du volume de longueur $L$ et de surface de passage $dA = r\ dr\ d\theta$ représenté ci-dessous.




Le premier principe appliqué à cette situation s'écrit :

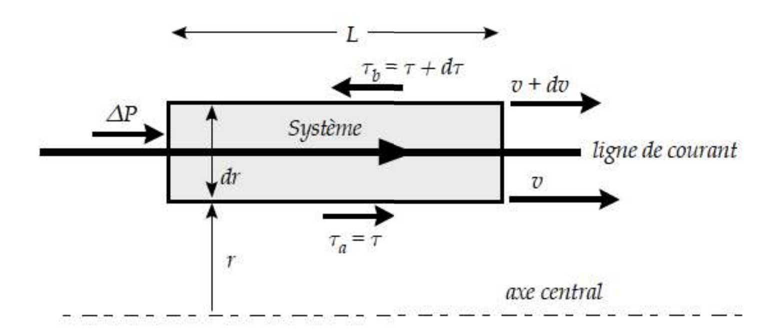
$$-d\dot{W}_P - d\dot{W}_\tau = \delta\dot{m}\left((u_2 - u_1) - q\right) \tag{A2-6-2}$$

où : $\delta\dot{m}$ : débit massique à travers $dA$

$d\dot{W}_P$ : travail net (puissance) dû à la pression

$d\dot{W}_\tau$ : travail net (puissance) dû au cisaillement

Les forces (contraintes) agissant sur le bloc de matière apparaissent sur la figure ci-dessous.




Notons que le cisaillement n'agit pas sur les parois latérales verticales puisque le gradient de vitesse est nul selon la direction normale au plan de la figure.

Alors : $$d\dot{W}_P = -\Delta P v \; dr \; d\theta$$

$$d\dot{W}_a = -L\tau_a v r \; d\theta = -L\tau_a v r \; d\theta$$

$$d\dot{W}_b = +L\tau_b\left(v+dv\right)\left(r+dr\right)\; d\theta = L\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r}dr\right)\left(v + \frac{\partial v}{\partial r}dr\right)\left(r+dr\right)d\theta$$

$$d\dot{W}_\tau = d\dot{W}_a + d\dot{W}_b$$

Si on retient uniquement les termes de premier ordre en $dr$,

$$d\dot{W}_\tau = L\tau r\frac{\partial v}{\partial r}\; dr\; d\theta + Lrv\frac{\partial \tau}{\partial r}\; dr\; d\theta + L\tau v\; dr\; d\theta$$

Or : $$\tau = \frac{\Delta P\, r}{2L} \quad \text{, donc} \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{\Delta P}{2L}$$

Alors, le travail total net (sous forme de puissance) s'écrit :

$$d\dot{W} = d\dot{W}_P + d\dot{W}_\tau = \frac{1}{2}\Delta P\, r^2\frac{\partial v}{\partial r}\; dr\; d\theta \qquad \text{(A2-6-3)}$$

$$\delta\dot{m} = \rho v r\; dr\; d\theta \qquad \text{(A2-6-4)}$$

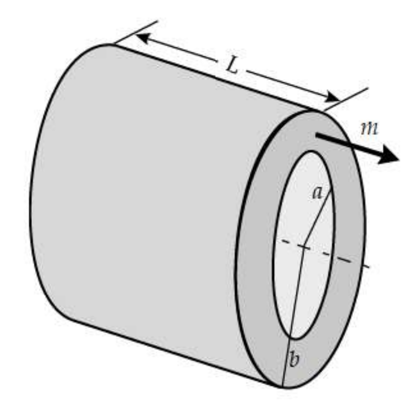
Combinant les équations (A2-6-1) à (A2-6-4), on trouve pour $h$ :

$$h_{1-2}\left(r\right) = -\frac{d\dot{W}}{\delta\dot{m}} = -\frac{\Delta P}{2\rho}\frac{r}{v}\frac{\partial v}{\partial r} \qquad \text{(A2-6-5)}$$

Rappelons que $h$ désigne en fait le produit $gh$.

Le résultat (A2-6-5) permet d'évaluer les pertes de la ligne de courant qui traverse le volume de contrôle infinitésimal considéré. Du fait de la symétrie, il n'est pas surprenant que celles-ci ne dépendent que de $r$. Considérons deux cas.

*Anneau cylindrique*




L'anneau cylindrique de rayon interne $a$, de rayon externe $b$ ($a < b \leq R$) et de longueur $L$ est traversé par le débit $\dot{m}$. Évaluons d'abord les pertes moyennes pour l'anneau en établissant le travail total résultant de l'action de la pression et du cisaillement.

$$\dot{W}_P = -\int_a^b \Delta P \; v(r) \; dA = -\dot{m}\frac{\Delta P}{\rho}$$

$$\dot{W}_a = -2\pi a L \tau(a) v(a) = -\pi a^2 v(a) \Delta P$$

$$\dot{W}_b = +2\pi b L \tau(b) v(b) = \pi b^2 v(b) \Delta P$$

$$\dot{W}_\tau = \dot{W}_a + \dot{W}_b = \pi \Delta P \left(b^2 v(b) - a^2 v(b)\right) = \dot{m}\frac{\Delta P}{\rho}\left[\frac{\left(b^2 v(b) - a^2 v(b)\right)}{\overline{v}\left(b^2 - a^2\right)}\right]$$

Le travail total :

$$\dot{W} = \dot{W}_P + \dot{W}_\tau = -\dot{m}\frac{\Delta P}{\rho}\left[1 - \frac{\left(b^2 v(b) - a^2 v(b)\right)}{\overline{v}\left(b^2 - a^2\right)}\right]$$

alors :

$$\overline{h}_{1-2} = \frac{-\dot{W}}{\dot{m}} = \frac{\Delta P}{\rho}\left[1 - \frac{\left(b^2 v(b) - a^2 v(b)\right)}{\overline{v}\left(b^2 - a^2\right)}\right]$$

où $\overline{h}_{1-2}$ désigne les pertes moyennes entre 1 et 2.

Afin d'évaluer $\overline{h}_{1-2}$, supposons un écoulement laminaire, c'est-à-dire :

$$v(r) = v_c\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad ; \quad \overline{v} = v_c\left(1 - \frac{\left(a^2 + b^2\right)}{2R^2}\right) \quad \text{et} \quad \dot{m} = \pi\rho\overline{v}\left(b^2 - a^2\right)$$

Alors :

$$\overline{h}_{1-2} = \frac{\Delta P}{\rho}\left(\frac{1}{\frac{2R^2}{\left(a^2 + b^2\right)} - 1}\right) \qquad \text{(A2-6-6)}$$

On peut aussi, par ailleurs, faire usage de la formule de l'équation (A2-6-5) avec :

$$\overline{h}_{1-2} = \frac{1}{\dot{m}}\int_A h_{1-2}\, d\dot{m}$$

$$h_{1-2}(r) = -\frac{\Delta P}{2\rho}\frac{r}{v}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\Delta P}{\rho}\left(\frac{r^2}{R^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}\right)$$

$$\overline{h}_{1-2} = \frac{1}{\dot{m}}\int_a^b h_{1-2}(r)\left(2\pi\rho v(r) r\, dr\right) \qquad \text{(A2-6-7)}$$

$$\overline{h}_{1-2} = \frac{\Delta P}{\rho}\left(\frac{1}{\frac{2R^2}{\left(a^2 + b^2\right)} - 1}\right)$$

*Cylindre plein de rayon $b \leq R$*

On a qu'à poser $a = 0$ dans ce qui précède pour trouver :

$$\dot{W} = \dot{W}_P + \dot{W}_\tau = -\dot{m}\frac{\Delta P}{\rho}\left[1 - \frac{v(b)}{\overline{v}}\right]$$

et

$$\overline{h}_{1-2} = \frac{-\dot{W}}{\dot{m}} = \frac{\Delta P}{\rho}\left[1 - \frac{v(b)}{\overline{v}}\right] \qquad \text{(A2-6-8)}$$

Pour un écoulement laminaire,

$$v(r) = v_c\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{et} \quad \overline{v} = v_c\left(1 - \frac{b^2}{2R^2}\right) \quad \text{et :} \quad \dot{m} = \pi\rho b^2\overline{v}$$

Ainsi (A2-6-8) devient :

$$\overline{h}_{1-2} = \frac{\Delta P}{\rho}\left(\frac{1}{\dfrac{2R^2}{b^2} - 1}\right) \tag{A2-6-9}$$

Ce qui correspond aussi au résultat du calcul (A2-6-7) si on pose $a = 0$.

Finalement, si on pose $b = R$ dans (A2-6-9) ou, alternativement, $a = 0$ et $b = R$ dans (A2-6-7), on retrouve le résultat bien connu :

$$\overline{h}_{1-2} = \frac{\Delta P}{\rho}$$

En conclusion, ce qu'on nomme généralement les « pertes » entre deux points d'un écoulement constituent en fait une moyenne et dans les cas considérés au chapitre 6, ce moyennage se fait sur l'ensemble de la section de la conduite.

# 2e PARTIE

# LA THERMODYNAMIQUE

# CHAPITRE 1

# CONCEPTS DE BASE ET PROPRIÉTÉS DES SUBSTANCES PURES

## Table des matières


**1.1 Champs d'application de la thermodynamique. 3**

**1.2 Concepts fondamentaux 4**
1.2.1 Système et volume de contrôle 4
1.2.2 État thermodynamique et variables d'état 4
1.2.3 Évolutions et cycles 5

**1.3 Propriétés des substances pures 6**
1.3.1 Changements de phase 6
1.3.2 Caractérisation d'un état thermodynamique pour une substance pure 9
1.3.3 Diagrammes *T-v, P-T et P-v* 10
1.3.4 Utilisation des diagrammes et des tables thermodynamiques 13

**1.4 Les gaz parfaits 17**

**1.5 Énergie interne 19**
1.5.1 Énergie interne d'un gaz parfait monoatomique 19
1.5.2 Énergie interne d'un gaz parfait diatomique 21
1.5.3 Énergie interne d'un gaz réel 22
1.5.4 L'énergie interne comme variable thermodynamique 22

**1.6 Équilibre thermique entre deux corps et principe zéro de la thermodynamique. 23**

**1.7 EXERCICES 25**

## 1.1 Champs d'application de la thermodynamique.

On désigne souvent la thermodynamique comme la « science de l'énergie » en ce sens qu'une de ses préoccupations principales est de comptabiliser les échanges énergétiques entre un système et son environnement et de faire usage à des fins « utiles » des modes de transformation de l'énergie d'une forme à une autre.

Les motivations qui ont donné lieu au développement de ce champ de l'activité humaine relevaient initialement de l'ingénierie. En effet, les premiers développements de la thermodynamique sont contemporains des débuts de la révolution industrielle dont l'impulsion première fut l'invention par Watt de la forme moderne de la machine à vapeur. On chercha à en expliquer le fonctionnement pour, en autres, pouvoir en établir l'efficacité. La thermodynamique était donc à la base une science à caractère empirique ou expérimental. La description du comportement de la matière qu'elle faisait s'appuyait sur l'observation et impliquait l'utilisation de grandeurs macroscopiques comme la température, la pression et le volume.

Dans la seconde moitié du XIX^e^ siècle on a assisté à l'émergence d'une nouvelle discipline, la mécanique statistique, dont l'objet était de prévoir le comportement de la matière à l'échelle macroscopique à partir de celui de ses constituants microscopiques, les atomes et les molécules. Alors que la thermodynamique classique ne faisait aucune hypothèse sur la structure de la matière, le lien que se proposait d'effectuer la mécanique statistique entre les niveaux microscopique et macroscopique nécessitait qu'on se dote d'un modèle de la constitution de la matière au niveau fondamental. C'est à partir de cette époque que le modèle atomique acquit la reconnaissance qui est la sienne aujourd'hui.

La thermodynamique contemporaine est donc tributaire de ces deux approches et intègre leurs méthodologies respectives. Dans le cadre de problèmes qui relèvent du génie, l'approche de la thermodynamique classique (ou appliquée) se révèle généralement suffisante. C'est donc celle-ci qui sera décrite dans le cadre de ce qui suit. Nous nous permettrons à l'occasion d'introduire des résultats provenant de la mécanique statistique afin d'envisager certains concepts sous un jour différent. Le tableau 1.1 donne une liste non-exhaustive des domaines pour laquelle la thermodynamique appliquée s'avère utile.

Moteurs
Turbines
Compresseurs, pompes
Centrales thermiques
Systèmes de combustion
Systèmes cryogéniques
Chauffage, ventilation et climatisation
Systèmes énergétiques alternatifs
Applications biomédicales

**Tableau 1.1** Champs d'applications de la thermodynamique

## 1.2 Concepts fondamentaux

### 1.2.1 Système et volume de contrôle

Nous rappelons ici les définitions introduites au chapitre 3 de la mécanique des fluides :

Système : masse spécifique qu'on a décidé d'étudier. Le système est entouré d'un milieu ambiant ou environnement avec lequel il est en interaction. S'il n'y a pas d'interaction, on dit du système qu'il est isolé.

Volume de contrôle : région de l'espace faisant l'objet d'une étude. La région extérieure au volume de contrôle constitue son environnement avec lequel le volume de contrôle peut échanger de la masse et de l'énergie.

*Remarque* : Certains auteurs utilisent les expressions de « système fermé » pour désigner un système et « système ouvert » pour désigner un volume de contrôle.

### 1.2.2 État thermodynamique et variables d'état

Le champ d'analyse de la thermodynamique classique est restreint aux systèmes qui sont en *équilibre thermodynamique* (que nous désignerons désormais par le seul vocable d'équilibre). On dit qu'un système est en équilibre lorsque *si on l'isole de son environnement, on n'observe aucune variation de ses propriétés macroscopiques*. De façon plus concrète, l'équilibre thermodynamique implique trois types d'équilibres :

1) équilibre mécanique : $\sum \mathbf{F} = 0$, implique que la pression est uniforme dans le système.

2) équilibre thermique : implique que la température est uniforme dans le système.

3) équilibre chimique : implique que les réactions chimiques (s'il y a lieu) sont terminées et que la répartition des espèces chimiques est homogène.

On parlera d'état thermodynamique du système (ou état du système) lorsque celui-ci est en équilibre. La thermodynamique classique est impuissante à décrire un système dans une configuration hors-équilibre. Il ne s'agit pas alors d'état thermodynamique à proprement parler. À l'équilibre, les différentes propriétés macroscopiques du système (pression, température, etc...) sont bien définies et servent en fait à caractériser l'état en question. Parmi les plus usuelles on retrouve les propriétés de température, pression, volume et d'énergie du système. On utilise les termes de variables d'état ou variables thermodynamiques pour les désigner. Ainsi, à chaque état correspond un ensemble de nombres, les grandeurs de ces variables d'état. Chaque ensemble de variables d'état est propre à un état thermodynamique spécifique et permet de le caractériser. Si le système évolue vers un autre état, les variables d'état seront

conséquemment altérées. Ce qui précède n'exclue pas qu'une variable, la température par exemple, puisse avoir la même valeur pour deux états distincts, mais l'ensemble des variables différera. La question de savoir combien de ces variables doivent être connues pour spécifier un état sera abordée plus loin.

### 1.2.3 Évolutions et cycles

On dit qu'un système effectue une *évolution* (ou transformation) quand le système connaît un changement d'état. Il existe en général une infinité de façons différentes pour le système d'évoluer d'un état vers un autre. Parmi celles-ci, on en remarque une classe d'importance particulière en thermodynamique, l'*évolution quasi statique*.

Une évolution est dite quasi statique lorsque toutes les configurations intermédiaires d'un système, quand il passe d'un état à un autre, constituent elles-mêmes des états thermodynamiques (états d'équilibre). L'évolution s'effectuera alors de façon contrôlée et à chaque instant on pourra assigner une valeur définie aux différentes variables d'état. Une telle évolution peut être stoppée et inversée à tout moment. A titre d'exemple considérons les deux évolutions illustrées à la figure 1.1

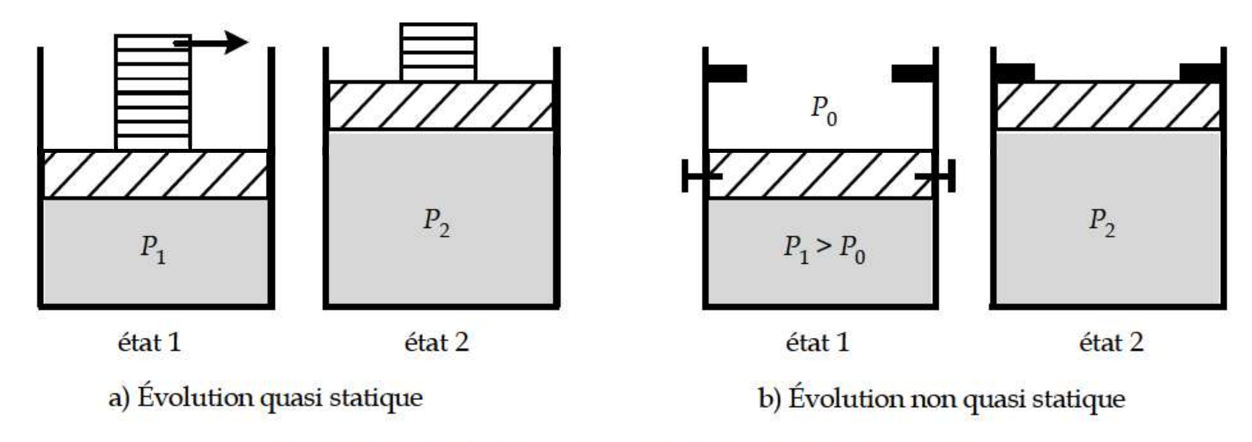



**Figure 1.1** Évolutions quasi statique et non quasi statique

À la figure 1.1 a) la substance (le système) est comprimée par un piston sur lequel on a disposé un grand nombre de petites masses (en théorie infiniment petites). Si on en retire une, les pressions exercées par le piston et dans le système ne différant que très peu, le piston ne sera pas accéléré et l'équilibre dans le système se rétablira presqu'immédiatement. À la figure 1.1 b) un piston est retenu par un ensemble de goupilles. Comme la pression du système est plus grande que la pression environnante $P_0$, le piston sera accéléré au moment de l'enlèvement des goupilles jusqu'à ce qu'il frappe les butées du haut et que l'équilibre se rétablisse (état 2). Remarquons que lorsque le piston passe par le point B, les différentes variables d'état n'ont pas de valeur uniforme à travers le système et cette configuration ne peut être qualifiée d'état d'équilibre (ou thermodynamique). La différence fondamentale entre les deux processus est évidente. Dans le cas de l'évolution quasi statique, toutes les configurations intermédiaires sont des états thermodynamiques ; on connaît les conditions qui prévalent dans le système à chaque instant lors de l'évolution. Pour l'évolution non quasi statique, seuls les états de départ et d'arrivée sont connus ; on ne sait rien du système entre ces deux instants.

Un *cycle* thermodynamique (ou évolution cyclique) comporte un ensemble d'évolutions effectuées séquentiellement de façon à ce que le système soit ramené à son état de départ après les avoir parcourues.

Un certain nombre d'évolutions sont tellement courantes en thermodynamiques qu'on a jugé utile de les nommer. Parmi celles-ci, on retrouve, en particulier :

- l'évolution *isobare* : évolution s'effectuant à pression constante
- l'évolution *isotherme* : évolution à s'effectuant température constante
- l'évolution *isochore* : évolution à s'effectuant volume constant

Notons que si une variable présente la même valeur au début et à la fin de la transformation, on ne peut conclure qu'elle se soit maintenue constante tout le long de l'évolution. Ainsi, par exemple, il arrive que les températures aux états de départ et de fin soient identiques; cela ne fait pas de l'évolution une évolution isotherme.

## 1.3 Propriétés des substances pures

La matière apparaît sous trois formes qu'on dénomme *phases* : la phase solide, la phase liquide et la phase vapeur. Souvent, deux phases d'une substance existent simultanément (on peut même faire cohabiter les trois phases en même temps), on parle alors d'équilibre de phase. On dit d'une substance qu'elle est pure si la composition chimique du système est homogène et stable. Ainsi un mélange d'eau liquide et vapeur est une substance pure. Bien que l'air ne soit pas une substance pure à proprement parler (il s'agit d'un mélange gazeux), il sera pour la suite considéré comme tel dans la mesure que les espèces chimiques le composa nt restent sous forme gazeuse.

### 1.3.1 Changements de phase

La figure 1.2 illustre une évolution à pression constante quasi statique effectuée sur de l'eau.

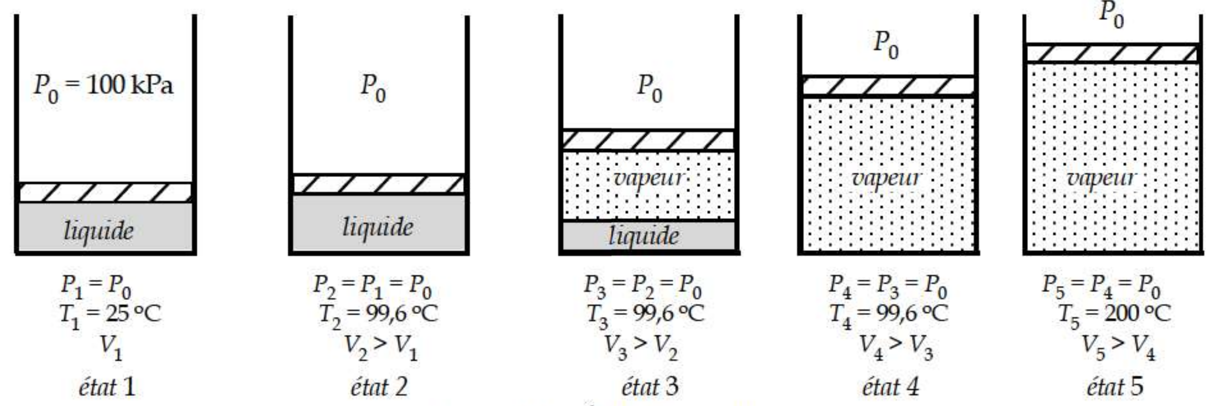



**Figure 1.2** Évolution isobare

De l'eau liquide à 25 °C (état 1) est placée sous un piston de masse négligeable qui peut se déplacer sans frottement. Il s'ensuit que la pression à cet état est égale à la pression atmosphérique

$P_o$. La substance est alors chauffée en la mettant en contact avec un corps à haute température (l'élément d'une cuisinière par exemple).

Remarquons d'abord que la pression ne sera pas affectée par le chauffage (processus isobare) puisque le piston est libre de se déplacer et que la seule force agissant sur le système provient de l'action de la pression atmosphérique $P_0$. On observe que le volume et la température augmentent jusqu'à ce que cette dernière atteigne 99,6 °C (état 2). Si le chauffage de la substance est poursuivi, on observe que de la vapeur d'eau apparaît au-dessus de la phase liquide. Comme la masse volumique de la vapeur est moins grande que celle du liquide, le volume total augmente rapidement. Toutefois, la température se maintient constante durant toute la vaporisation de l'eau. L'état 3 est représentatif des états intermédiaires entre le début et la fin de la vaporisation. À la toute fin de la vaporisation (état 4), l'eau n'existe que sous forme vapeur. En poursuivant le chauffage à partir de cet état on observe un comportement qui rappelle celui que présentait la substance sous la forme liquide, à savoir que la température et le volume augmentent. Le chauffage cesse lorsque la température atteint 200 °C (état 5).

Si on se représente l'ensemble des états par lesquels est passée l'eau sur un diagramme température-volume (diagramme *T-V*), on obtient la courbe A de la figure 1.3 sur laquelle on a situé les états 1 à 5 ci-haut mentionnés.

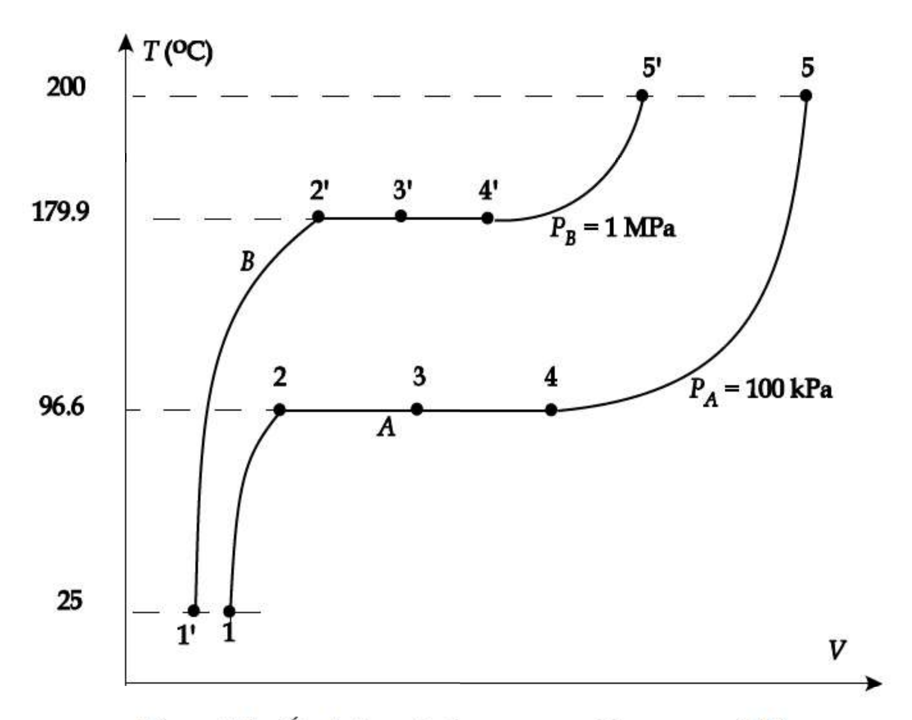



**Figure 1.3** Évolutions isobare sur un diagramme *T-V*

Si l'évolution était répétée entre les mêmes températures à la pression de 1 MPa, on obtiendrait la courbe B. Les états 1′ à 5′ correspondent aux états 1 à 5. On observe que l'allure générale des deux courbes est la même mais que la température à partir de laquelle la vaporisation se produit est plus élevée.

Les états 2 à 4 et 2′ à 4′ sont des états pour lesquels les phases vapeur et liquide sont en équilibre. On dit de ces états que ce sont des états de saturation ou états saturés. On remarque que lorsque

la pression est fixée pour ces états (100 kPa ou 1 MPa, par exemple), une seule température est observée. Pour ces états, les variables de température et de pression ne sont pas indépendantes. La température pour laquelle on obtient un mélange liquide-vapeur à une pression donnée porte le nom de *température de saturation* ($T_S$). De façon similaire, la pression pour laquelle on a un mélange liquide-vapeur à une température donnée est dénommée *pression de saturation* ($P_S$).

Alors : si $P$ = 100 kPa $T_S$ = 99,6 °C

et si $T$ = 179,9 °C $P_S$ = 1 MPa

On peut représenter l'ensemble des couples pression-température pour lesquelles les mélanges liquide-vapeur sont possibles sur un diagramme pression-température. La courbe ainsi obtenue est appelée courbe de vaporisation (figure 1.4).

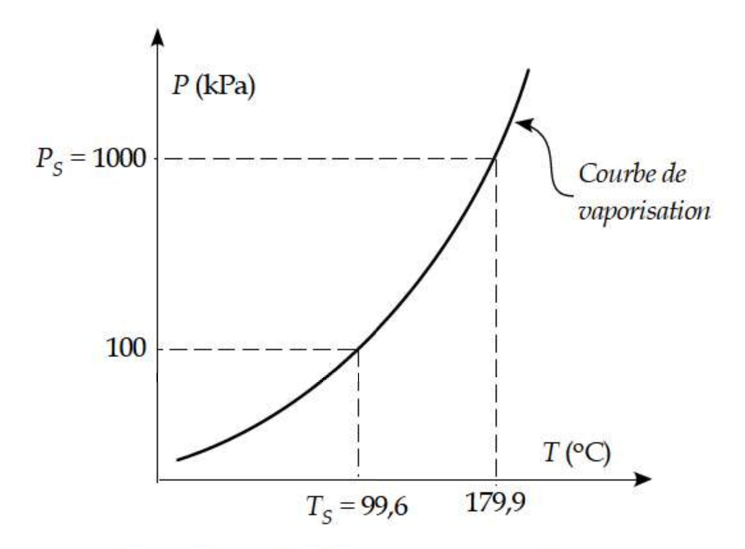



**Figure 1.4** Courbe de vaporisation de l'eau

Pour un mélange liquide-vapeur il est particulièrement utile de connaître la proportion de la masse totale que l'on retrouve dans les phases gazeuse et liquide. Si $m_g$ désigne la masse gazeuse et $m$ la masse du système (masse totale), alors le *titre* $x$ , est défini par :

$$x = \frac{m_g}{m} \tag{1-1}$$

Le titre désigne ainsi le pourcentage de la masse du système qu'on retrouve sous forme vapeur. Un état pour lequel $x = 0$ (liquide seulement) est appelé état de *liquide saturé* alors qu'un état pour lequel $x = 1$ est dénommé état de *vapeur saturée*. Notons avant de conclure que la variable $x$ ne prend un sens que pour les états de mélange liquide-vapeur. Ainsi à l'état 1 de l'exemple de la figure 1.3 la substance n'est pas à des conditions de pression et de température pour lesquelles un mélange liquide-vapeur serait possible; il ne s'agit pas d'un état de saturation. Le titre n'est pas défini dans ces conditions et ce serait une erreur de dire qu'il est nul. On dira plutôt que l'état de la substance est un état de *liquide comprimé*. De la même façon, l'état 5 du

même exemple n'est pas un état pour lequel $x = 1$ puisque $T \neq T_s$ ( ce n'est pas un état saturé). Comme l'eau est sous forme vapeur on la désignera comme de la *vapeur saturée*.

### 1.3.2 Caractérisation d'un état thermodynamique pour une substance pure

Nous avons vu précédemment qu'un état thermodynamique se distingue d'un autre par les valeurs que prennent ses variables d'état. La question se pose maintenant de savoir combien de ces variables doivent être connues afin de caractériser complètement un état. Avant de répondre à cette question considérons les variables d'état avec lesquelles nous serons appelés à travailler par la suite

| **Symbole** | **Variable** | **Unité S.I.** |
|---|---|---|
| $P$ | pression | Pa |
| $T$ | température | K |
| $x$ | titre | - |
| $V$ | volume | $m^3$ |
| $U$ | énergie interne | J |
| $H$ | enthalpie | J |
| $S$ | entropie | J/K |

**Tableau 1.2** Liste des variables thermodynamiques que nous emploierons

À l'exception des deux dernières, l'enthalpie et l'entropie, ces grandeurs sont familières à la plupart. Pour cette raison, pour ce qui suit, limitons la discussion aux cinq premières variables ($P$, $T$, $x$, $V$ et $U$). Supposons que l'on dispose d'une certaine quantité d'eau à un état thermodynamique donné. Chacune de ces variables prend alors une valeur déterminée. Scindons alors le système en deux parties égales et voyons en quoi les différentes variables de chaque sous-système ainsi produit seront affectées par l'opération. On remarque que pour un certain nombre de celles-ci ($P$, $T$, $x$), la valeur de la variable reste inchangée alors que pour les autres ($V$, $U$), la valeur de la variable pour chaque sous-système représente la moitié de la valeur qu'elle a pour le système entier. Ces deux classes de variables sont donc qualitativement différentes. On définit les concepts suivants :

*variable intensive* : variable dont la grandeur ne dépend pas de la masse du système

*variable extensive* : variable dont la grandeur est proportionnelle à la masse du système

On peut produire une variable intensive à partir d'une variable extensive en la divisant par la masse. Ainsi définissons :

$$v=\frac{V}{m} \quad \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\right) \qquad \text{volume massique}$$

$$u=\frac{U}{m} \quad \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right) \qquad \text{énergie interne massique}$$

$$h=\frac{H}{m} \quad \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right) \qquad \text{enthalpie massique}$$

$$s=\frac{S}{m} \quad \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K^*kg}}\right) \qquad \text{entropie massique}$$

En l'absence d'effets gravitationnels, électromagnétiques et de tension de surface, l'expérience montre que :

**il suffit de connaître deux variables intensives pour caractériser un état thermodynamique.**

En conséquence, la connaissance de deux variables intensives permet de déterminer toute autre variable intensive caractéristique de l'état considéré. Connaître $T$ et $v$ par exemple, permet d'établir $P$, $x$ (s'il y a lieu), $u$, $h$ et $s$. Toutes les paires de deux variables intensives envisageables sont acceptables à l'exception de la combinaison de la pression et de la température pour un état saturé.

### 1.3.3 Diagrammes *T-v, P-T et P-v*

Si l'expérience de la figure 1.2 est répétée un grand nombre de fois à diverses pressions et qu'on note les couples température-volume massique ($T$, $v$) pour les états de liquide saturé $x = 0$ et de vapeur saturée ($x = 1$) dans chaque cas, une courbe en forme de cloche apparaît sur un diagramme $T$- $v$ (figure 1.5). La portion gauche de la courbe correspond à l'ensemble des états de liquide saturé, et la portion droite, à l'ensemble des états de vapeur saturée possibles. Les états compris entre les états de liquide saturé et les états de vapeur saturée sont manifestement des états de mélange liquide-vapeur.

Ainsi, les états situés dans la région comprise sous la « cloche » du diagramme $T$-$v$ (région L-V de la figure 1.5), sont des états de mélange liquide-vapeur. En contrepartie, les états qui se situent soit à gauche, soit à droite de la « cloche », sont des états respectivement de liquide comprimé (région L de la figure 1.5) et de vapeur surchauffée (région V de la figure 1.5). On remarque que les courbes de liquide saturé et de vapeur saturé se rencontrent en un point appelé *point critique*. Les températures, pression et volume massique à cet état sont dénommés *température critique* ($T_c$), *pression critique* ($P_c$) et *volume massique critique* ($v_c$), respectivement. On aussi représenté l'allure que prennent deux évolutions isobares dans ce type de diagramme. Ce pourrait être, par exemple, les évolutions à 100 kPa et 1 MPa que nous avons déjà décrites.

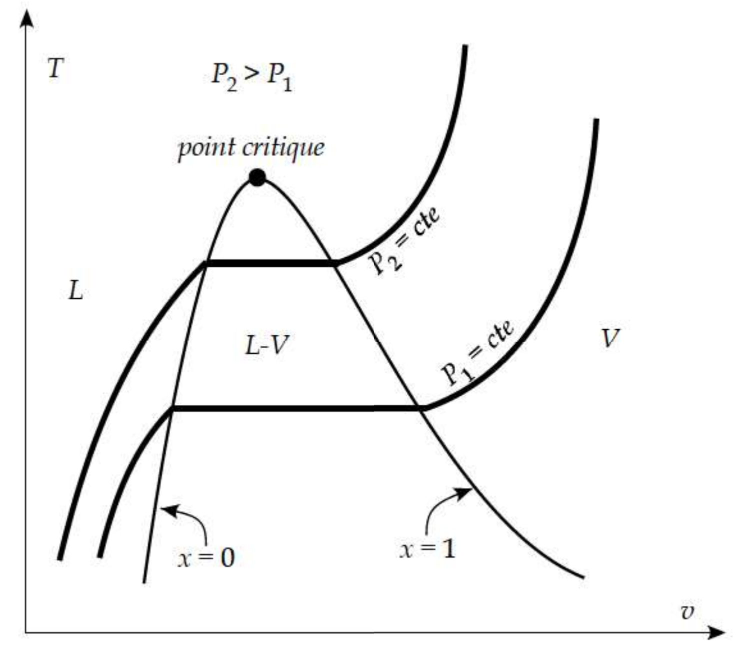



**Figure 1.5** Diagramme *T-v* d'une substance pure

Le diagramme *P-T* (ou diagramme de phases) de la figure 1.6 est une extension de la figure 1.4 où apparaît, entre autres, la phase solide. Chacune des courbes du diagramme (de vaporisation, de sublimation et de fusion) représente les couples *P-T* tels qu'un équilibre de phase est possible.

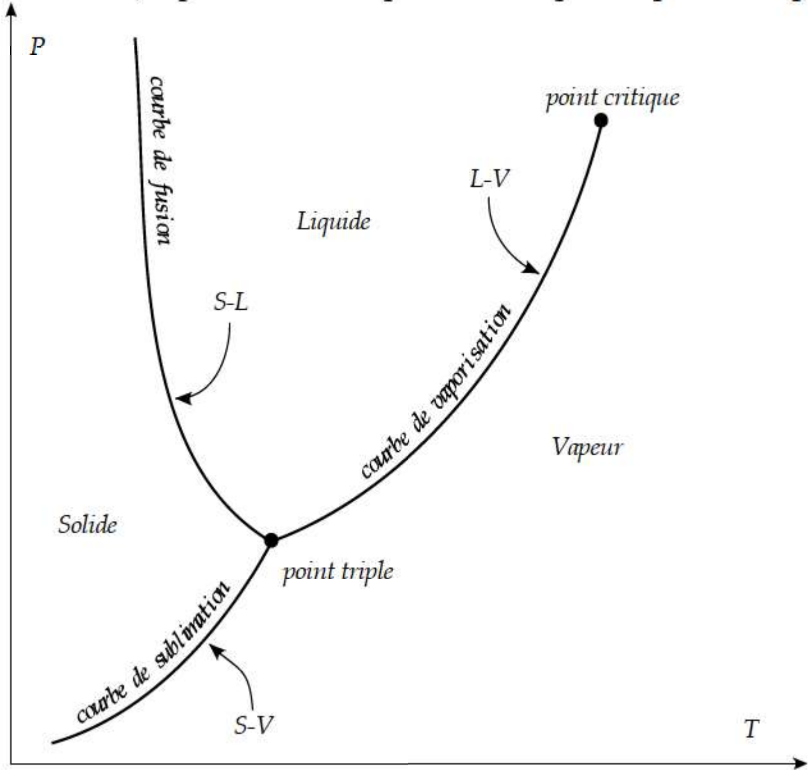



**Figure 1.6** Diagramme *P-T* pour une substance comme l'eau

Remarquons que les courbes se rencontrent au point triple qui spécifie les conditions de température et de pression telles qu'un équilibre des trois phases de la substance est possible.

Par exemple pour l'eau, les pression et température au point triple sont 0,6113 kPa et 0.01 °C respectivement, et un équilibre dans des proportions variables de glace, d'eau liquide et de vapeur d'eau est possible. Chaque point d'un diagramme *P-T* est caractéristique d'un état sauf pour les points se retrouvant sur l'une des trois courbes. On a vu en effet que pour un mélange liquide-vapeur, il existe une infinité d'états $(0 \leq x \leq 1)$ pour lesquels la pression et la température ont les grandeurs spécifiées par la courbe de vaporisation. Il en va de même pour les mélanges solide-liquide et solide-vapeur.

Chaque point des courbes de vaporisation, de sublimation et de fusion représente donc en fait une infinité d'états distincts. À la figure 1.7 on a illustré l'évolution isobare dont on a discuté précédemment (figure 1.2). Notons que l'ensemble des états 2 à 4 sont confondus en un point.

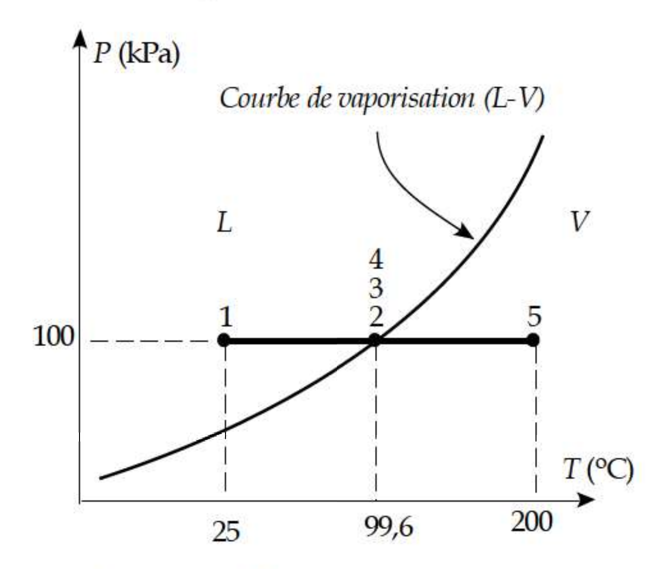



**Figure 1.7** Évolution de la figure 1.2 sur un diagramme *P-T*

Le diagramme pression-volume massique (*P-v*) est d'importance particulière en thermodynamique comme nous le verrons au chapitre 2. La figure 1.8 représente le diagramme *P-v* d'une substance pure. On remarque la présence de la « cloche » sous laquelle sont regroupés les états de mélange liquide-vapeur (*L-V*), ainsi que les régions de vapeur surchauffée (*V*) et de liquide comprimé (*L*) de part et d'autre de celle-ci. On a aussi dessiné les courbes représentant deux évolutions isothermes (température constante).

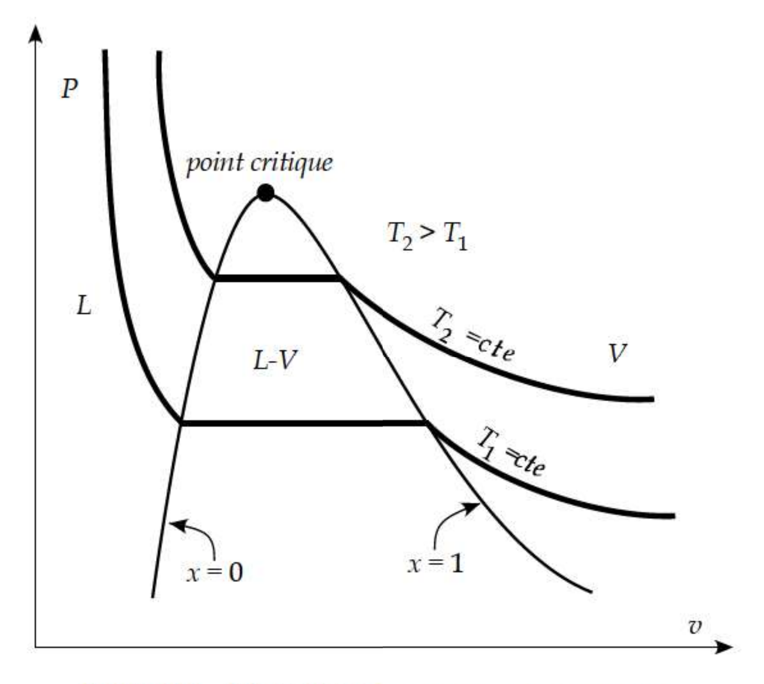



**Figure 1.8** Diagramme *P-v* d'une substance pure.

### 1.3.4 Utilisation des diagrammes et des tables thermodynamiques

Un mélange liquide-vapeur est en fait un mélange de liquide saturé et de vapeur saturée dans les proportions déterminées par le titre $x$. Si on veut établir le volume massique dans ces conditions il suffit donc de connaître les volumes massiques du liquide saturé ($x = 0$), de la vapeur saturée ($x = 1$) ainsi que le titre. Comme le volume est une variable extensive, on peut par définition écrire :

$$V = V_f + V_g$$

Les indices $f$ et $g$ réfèrent aux états de liquide saturé et de vapeur saturée respectivement.
Alors :

$$v = \frac{V}{m} = \frac{V_f}{m} + \frac{V_g}{m} = \frac{m_f}{m} v_f + \frac{m_g}{m} v_g$$

Par définition, $x = \dfrac{m_g}{m}$ et $(1-x) = \dfrac{m_f}{m}$

En réarrangeant, il vient : $v = v_f + x\left(v_g - v_f\right)$

$$v = v_f + x\, v_{fg} \tag{1-2}$$

où : $$v_{fg} = v_g - v_f \tag{1-3}$$

De l'équation (1-2) on tire aussi : $$x = \frac{v - v_f}{v_{fg}} \tag{1-4}$$

Le résultat (1-2) et donc le résultat (1-4), est une conséquence du fait que $V$ est une variable extensive et que les volumes des fractions liquide et vapeur s'additionnent. Puisque ce constat s'applique à toute variable extensive, il y aura des équivalents à (1-2) et à (1-4) pour les autres variables extensives avec lesquelles nous serons amenés à travailler. Ainsi, considérant une variable extensive hypothétique $Y$, sa variable correspondante massique s'obtiendra dans le cas d'état saturé par :

$$y = y_f + x\, y_{fg} \tag{1-5}$$

et on aura :

$$x = \frac{y - y_f}{y_{fg}} \tag{1-6}$$

Par exemple, pour l'énergie interne massique $u$,

$$u = u_f + x\, u_{fg}$$

**Exemple 1.1** : Soit de l'eau à $P$ = 300 kPa. Déterminez le volume massique pour les températures :

i) $T_a$ = 150 °C
ii) $T_b$ = 100 °C
iii) $T_c$ = 133,5 °C

*Solution*

En se référant à la table A.1.2 on peut situer les 3 points (états) sur un diagramme *P-T*.

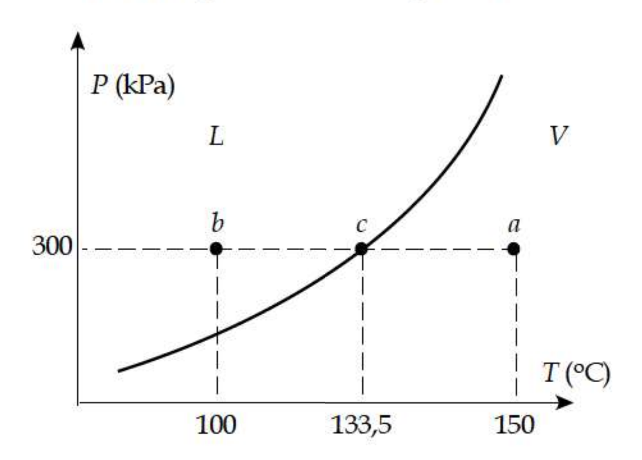



**Figure 1.9** États de l'exemple 1.1 sur un diagramme *P-T*

i) $\left.\begin{array}{l} P = 300 \text{ kPa} \\ T_a = 150 \text{ °C } > T_s \end{array}\right\}$ vapeur surchauffée

De la table A.1.3 on tire : $v_a = 0{,}6339 \text{ m}^3/\text{kg}$

ii) $\left.\begin{array}{l} P = 300 \text{ kPa} \\ T_b = 100\ °\text{C} < T_s \end{array}\right\}$ liquide comprimé

À la table A.1.4, on remarque que les premières entrées correspondent à une pression de 5 MPa (>> 300 kPa). Lorsque l'on ne dispose pas de tables de liquide comprimé ou, comme c'est le cas ici, elles sont incomplètes, on procède de la façon qui suit. On admettra que le liquide comprimé est dans le même état que le liquide saturé à la <u>même température</u>. Ainsi :

$$v_b = v_f\left(100\ °\text{C}\right) = 0{,}001044 \text{ m}^3/\text{kg}$$

iii) $\left.\begin{array}{l} P = 300 \text{ kPa} \\ T_c = 133{,}5\ °\text{C} = T_s \end{array}\right\}$ mélange liquide-vapeur

On ne dispose pas de suffisamment d'information pour établir $v_c$.

**Exemple 1.2 :** Soit du réfrigérant R-134a à $P = 200$ kPa .
Déterminez la température et le titre (s'il y a lieu) pour :
i) $v_a = 0{,}04 \text{ m}^3/\text{kg}$ et ii) $v_b = 0{,}12 \text{ m}^3/\text{kg}$

*Solution*

En se référant à la table A-12, on trouve pour $P$ = 200 kPa,

$v_f = 0{,}0007532 \text{ m}^3/\text{kg}$ et $v_g = 0{,}0993 \text{ m}^3/\text{kg}$

On peut situer les états sur un diagramme *P-v.*

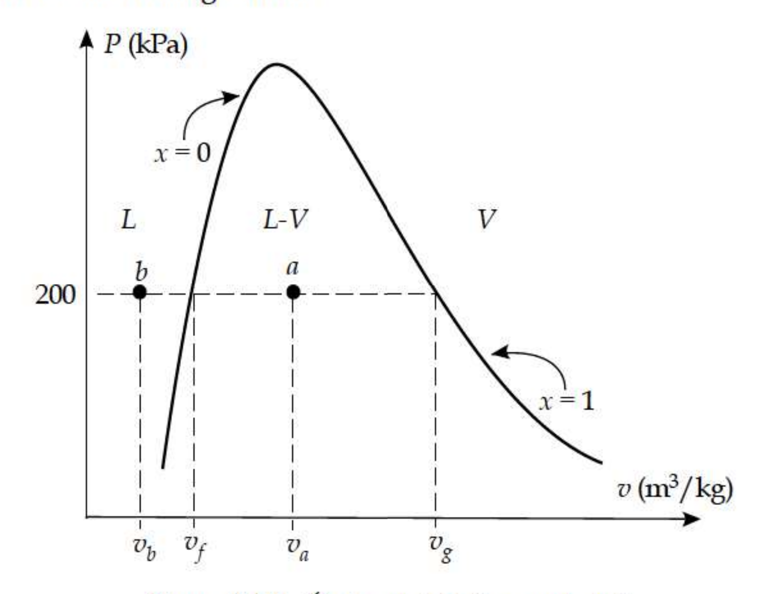



**Figure 1.10** États *a* et *b* de l'exemple 1.2

i) $\left.\begin{array}{l} P = 200 \text{ kPa} \\ v_a = 0{,}04 \text{ m}^3/\text{kg} \end{array}\right\} \; v_f < v_a < v_g \Rightarrow$ mélange liquide-vapeur

Puisque : $$v_a = v_f + x_a \, v_{fg}$$

alors : $$x_a = \frac{v_a - v_f}{v_{fg}} = 0{,}398 \quad \text{et :} \quad T_a = -10{,}09 \text{ °C}$$

ii) $\left.\begin{array}{l} P = 200 \text{ kPa} \\ v_b = 0{,}12 \text{ m}^3/\text{kg} \end{array}\right\} \; v_b > v_g \Rightarrow$ vapeur surchauffée

Le titre n'est pas défini à cet état.
Par interpolation dans la table A-13, $T_b = 33{,}2$ °C

**Exemple 1.3 :** Soit de l'eau à $T = 200$ °C. Déterminez l'énergie interne massique pour les volumes massiques suivants :
i) $v_a = 0{,}1 \text{ m}^3/\text{kg}$ et ii) $v_b = 0{,}206 \text{ m}^3/\text{kg}$

*Solution*

En se référant à la table A.1.1, on trouve :

$v_f = 0{,}001157 \text{ m}^3/\text{kg}$ et $v_g = 0{,}12736 \text{ m}^3/\text{kg}$

On peut situer les deux états sur un diagramme *T-v*.

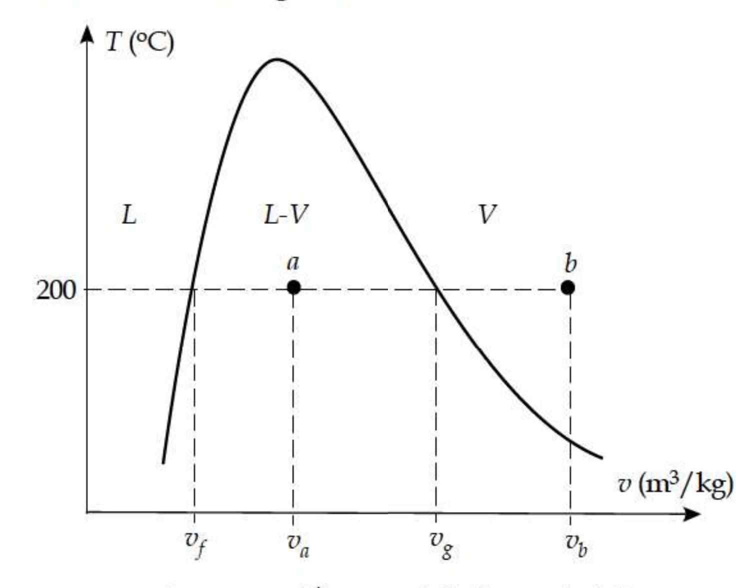



**Figure 1.11** États *a* et *b* de l'exemple 1.3

i) $\left.\begin{array}{l} T = 200 \text{ °C} \\ v_a = 0{,}1 \text{ m}^3/\text{kg} \end{array}\right\} v_f < v_a < v_g \Rightarrow$ mélange liquide-vapeur

Puisque : $v_a = v_f + x_a\, v_{fg}$

alors : $x_a = \dfrac{v_a - v_f}{v_{fg}} = 0{,}7832$

Ainsi :: $u_a = u_f + x_a\, u_{fg}$ ($u_f$ et $u_{fg}$ à la table A.1.1)

$u_a = 2217{,}1\ kJ/kg$

ii) $\left.\begin{array}{l} T = 200 \text{ °C} \\ v_b = 0{,}206 \text{ m}^3/\text{kg} \end{array}\right\} v_b > v_g \Rightarrow$ vapeur surchauffée

À la table A.1.3 on trouve : $P_b = 1\text{MPa}$
et $u_b = 2621{,}9 \text{ kJ/kg}$

## 1.4 Les gaz parfaits

En général les molécules d'un gaz interagissent entre elles par le biais de forces intermoléculaires (ou interatomiques) qui sont généralement globalement attractives mais qui peuvent être répulsives à l'occasion (très grande densité). Un gaz parfait est défini comme un gaz pour lequel ces interactions sont inexistantes. On admet toutefois que les molécules peuvent entrer en collision avec elles-mêmes et les parois d'un contenant. On peut penser à un grand nombre de boules de ping-pong se déplaçant dans toutes les directions et se heurtant à l'occasion par le biais de collisions élastiques. À l'aide de la mécanique statistique ou de la cinétique des gaz, il est possible de montrer que les considérations qui précèdent conduisent à l'équation suivante, la loi des gaz parfaits :

$$PV = Nk_BT \tag{1-7}$$

où : $N$ : nombre total de molécules (ou d'atomes) de gaz
$k_B$ : constante de Boltzmann (constante universelle)

$$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

Utilisant le nombre d'Avogadro, $N_A$, et la masse molaire $M$ du gaz, on définit la constante du gaz $R$ :

$$R = \frac{N_A k_B}{M} \left( \text{J}/\text{K} * \text{kg} \right) \qquad \text{(table A.8)}$$

et l'équation (1-7) s'écrit :

$$PV = mRT \tag{1-8}$$

En divisant par la masse de part et d'autre, on trouve :

$$Pv = RT \tag{1-9}$$

Dans le cadre de ce cours nous utiliserons les formes (1-8) et (1-9)de la loi des gaz parfaits car elles font intervenir des variables thermodynamiques usuelles.

*Note* : Il existe une dernière forme de la loi des gaz parfaits que les chimistes préfèrent employer faisant usage de $n$, le nombre de moles de substance plutôt que de la masse :

$$PV = n\overline{R}T$$

avec $\overline{R}$ , la constante <u>universelle</u> des gaz : $\overline{R} = N_A k_B = 8.314 \ \mathrm{J/K*mol}$

Pour illustrer la différence dans les comportements que présentent les gaz parfaits et les gaz réels, respectivement, considérons la figure 1.12.

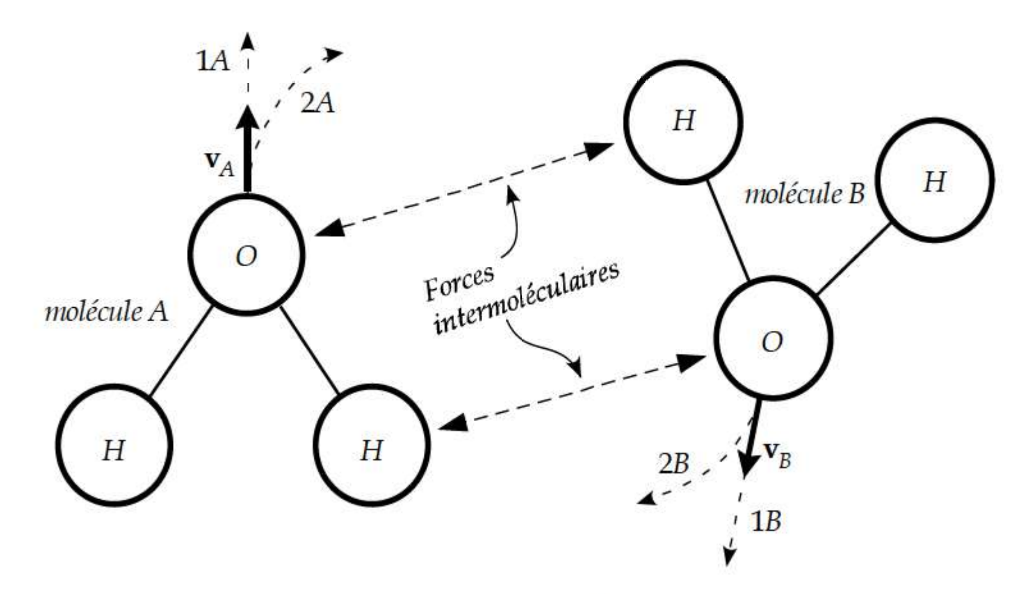



**Figure 1.12** Trajectoires de deux molécules d'eau en absence et en présence de forces attractives

Cette figure présente les trajectoires que décriraient deux molécules d'eau lorsqu'il n'y a pas d'interaction entre elles (gaz parfait) et lorsqu'une force attractive existe entre elles. En absence d'interaction, chacune des molécules suivra une trajectoire rectiligne dans le prolongement de sa vitesse à cet instant (trajectoires 1*A* et 1*B*). Si on admet toutefois qu'elles interagissent par le biais d'une force résultante attractive, les trajectoires seront affectées et prendront les allures représentées 2*A* et 2*B* de la figure. Puisque la grandeur des forces intermoléculaires (ce sont des forces électriques) décroît avec la distance intermoléculaire, on comprendra que ces interactions soient fortement dépendantes de la densité du gaz.

De plus, outre les équations d'état (1-7) à (1-9), l'hypothèse de gaz parfait conduit à un résultat fondamental en thermodynamique. La mécanique statistique nous enseigne que l'énergie cinétique de translation des molécules est reliée à la température. Si $\overline{K}_{trans}$ désigne l'énergie cinétique moyenne associée au déplacement dans l'espace d'une molécule (translation), alors :

$$\overline{K}_{trans} = \frac{3}{2} k_B T \tag{1-10}$$

Bien que le résultat (1-10) ait originellement été dérivé comme conséquence de l'hypothèse de gaz parfait, il est possible de montrer qu'il est applicable aux gaz réels sous certaines conditions Ce résultat est important à bien des égards, notamment parce qu'il permet de relier un paramètre microscopique $\overline{K}_{trans}$ au paramètre macroscopique de température et fournit une interprétation du concept de température.

Les considérations qui précèdent permettent de définir les conditions sous lesquelles un gaz réel pourra être traité comme un gaz parfait. Si la distance intermoléculaire est suffisamment grande (volume important ou faible pression) ou si la vitesse des molécules est suffisamment grande de sorte qu'elle soit peu affectée par les forces intermoléculaires (haute température), le gaz réel présentera un comportement approximant celui d'un gaz parfait et pourra être considéré comme tel. En termes concrets, on se dote des barèmes suivants : un gaz réel se comporte comme un gaz parfait quand :

1) la pression est beaucoup plus petite que la pression critique du gaz, peu importe la température,

**ou,**

2) la température est supérieure à deux fois à la température critique pour des pressions allant jusqu'à quatre fois la pression critique.

Les constantes critiques de plusieurs gaz apparaissent au tableau A.6

## 1.5 Énergie interne

Le premier principe de la thermodynamique qui sera présenté au chapitre suivant met en cause une grandeur physique, l'énergie interne *U*, qui est souvent mal comprise. Le propos de la discussion qui suit est d'en expliquer la nature et d'établir qu'il s'agit d'une propriété thermodynamique (variable d'état).

### 1.5.1 Énergie interne d'un gaz parfait monoatomique

Le système le plus simple à analyser en ce qui a trait à son énergie interne, est le gaz parfait monoatomique. C'est pourquoi nous l'avons choisi comme premier sujet d'étude. Un gaz de ce type peut être assimilé à un ensemble de billes n'exerçant aucune force les unes sur les autres.

Admettons que le gaz est placé dans un champ gravitationnel uniforme de grandeur $g$. L'énergie totale du système est, comme son nom l'indique, donnée par la somme des énergies. Il y en a de deux types : l'énergie cinétique de translation et l'énergie potentielle de gravité. Si $E_K$ et $E_P$ représentent respectivement ces deux grandeurs, alors l'énergie totale $E$ s'obtient par :

$$E = E_K + E_P$$
(1-11)

où :

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 \quad \text{et} \quad E_P = \sum_i m_i g z_i \tag{1-12}$$

$v_i$ et $z_i$ représentent la grandeur de la vitesse et l'élévation de la ième particule.

Si $M$ désigne la masse totale du système et $z_{CM}$ l'élévation de son centre de masse, alors on montre aisément que :

$$E_P = \sum_i m_i g z_i = M g z_{CM} \tag{1-13}$$

Par ailleurs, en ce qui a trait à l'énergie cinétique du système, on observe qu'elle peut être considérée comme la somme de deux contributions.

$K_{CM}$ : l'énergie cinétique du système considéré comme un point matériel se déplaçant à la vitesse du centre de masse $(v_{CM})$.

$$K_{CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$K_{\text{int}}$ : la somme des énergies cinétiques des particules mesurées relativement au centre de masse c'est-à-dire du fait de leur vitesse par rapport au centre de masse, $v_{i/CM}$.

$$K_{\text{int}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \, v_{i/CM}^2$$

Alors :

$$E_K = K_{CM} + K_{\text{int}} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \, v_{i/CM}^2 \tag{1-14}$$

Ainsi l'énergie totale s'écrira :

$$E = \left( M g z_{CM} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right) + \sum_i m_i \, v_{i/CM}^2 \tag{1-15}$$

Le terme entre parenthèses est souvent désigné par le vocable d'*énergie mécanique* du système. Celle-ci peut être vue comme l'énergie qui serait celle du système s'il était réduit à un point matériel de masse $M$ (masse ponctuelle). Le dernier terme de l'équation (1-15) constitue l'énergie interne $U$ du gaz parfait. Un système comportant un grand nombre de particules, même s'il est au repos et n'est pas soumis à des forces externes (ici, la force de poids), possède de l'énergie en

raison des mouvements individuels des objets le constituant, c'est son énergie interne. On considérera plus loin d'autres contributions à cette dernière. On peut donc écrire :

$$E = \left( Mgz_{CM} + \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 \right) + U \tag{1-16}$$

Nous avons vu précédemment que pour un gaz parfait comportant $N$ particules, l'énergie cinétique de translation vaut :

$$K_{trans} = \frac{3}{2} N k_B T \tag{1-17}$$

Puisque l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique est seulement le fait de l'énergie de translation il s'ensuit que :

$$U = \frac{3}{2} N k_B T \tag{1-18}$$

Ce résultat est fondamental car il montre que l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique (l'hélium gazeux, par exemple) ne dépend que de sa température.

### 1.5.2 Énergie interne d'un gaz parfait diatomique

Considérons une molécule constituée de deux atomes (figure 1.13). Cet objet peut effectuer des rotations autour des axes A-A', B-B' et C-C'. À chacune de ces mouvements on peut associer une énergie cinétique de rotation $K_{rot}$. Bien que les forces intermoléculaires soient inexistantes les atomes constituant la molécule interagissent entre eux (comme deux masses reliées par un ressort) et ils vibrent le long de l'axe les joignant. On associera alors une énergie cinétique de vibration $K_{vib}$ à la molécule et en raison de cette force, une énergie potentielle $V_{vib}$.

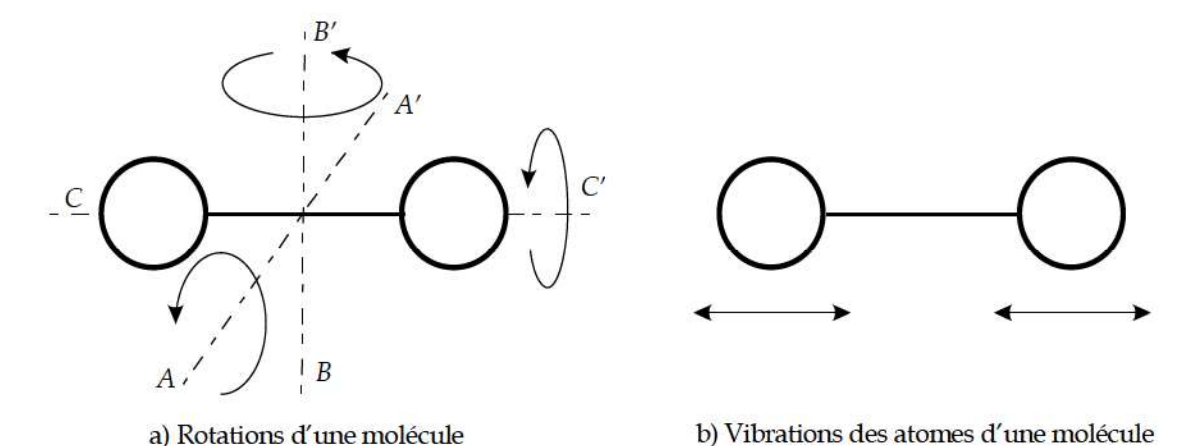



**Figure 1.13** Modes de rotation et de vibration d'une molécule diatomique.

Si la particule $i$ possède les énergies $K_{trans(i)}$, $K_{rot(i)}$ et $V_{vib(i)}$, alors l'énergie interne du gaz s'obtient en sommant ces contributions pour l'ensemble des molécules, c'est-à-dire :

$$U = \sum_i K_{trans(i)} + K_{rot(i)} + K_{vib(i)} + V_{vib(i)}$$

La mécanique statistique montre que si la température est suffisamment élevée, chacun des termes de l'équation précédente est proportionnel à la température. Ainsi, on obtient le résultat que l'énergie interne est proportionnel à la température.

$$U \propto T \tag{1-19}$$

Le résultat (1-19) peut se généraliser au cas des molécules polyatomiques avec comme conséquence fondamentale que l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température.

### 1.5.3 Énergie interne d'une substance

Chaque molécule d'un gaz réel est soumise à un ensemble de forces intermoléculaires exercées par ses consœurs. Elle possède en l'occurrence une énergie potentielle qui est la manifestation énergétique de l'action de ces forces. L'énergie interne totale sera alors donnée par la somme des énergies déjà considérées lors des discussions sur les gaz parfaits et de l'énergie potentielle d'interaction moléculaire. Comme les forces qui sont à l'origine de cette énergie potentielle sont de nature électrique, leur intensité va en décroissant avec la distance intermoléculaire. L'énergie potentielle d'interaction sera en conséquence dépendante du volume (ou de la pression). Ces dernières conclusions peuvent être étendues dans une bonne mesure aux cas des liquides et des gaz.

En conclusion, on fait les constats suivants. Les énergies de translation, de rotation et de vibration des molécules sont dépendantes de la température mais la présence de forces intermoléculaires dans une substance ajoute une contribution d'énergie potentielle d'interaction qui dépend du volume ou de la pression. L'énergie interne est donc, en général, fonction de la température et du volume. Puisqu'un gaz parfait est par définition exempt de forces intermoléculaires, son énergie interne ne dépend que de la température.

### 1.5.4 L'énergie interne comme variable thermodynamique

L'énergie interne que possède un système à un état donné est fonction de variables thermodynamiques. On conclue qu'elle doit elle-même être une variable d'état.

Comme l'énergie est par sa nature une grandeur additive (l'énergie du système [A+B] correspond à l'énergie de A + l'énergie de B), il s'ensuit que l'énergie interne sera une variable extensive. La variable intensive associée sera donc l'énergie interne massive définie par :

$$u = \frac{U}{m} \quad \left( \mathrm{J}/_{\mathrm{kg}} \right) \tag{1-20}$$

Rappelons que pour un mélange liquide-vapeur, $u$ est donnée par :

$$u = u_f + x u_{fg}$$

À titre de variable thermodynamique, l'énergie interne massique permet de caractériser un état. La connaissance de $T$ et $u$, par exemple, permet de déterminer toute autre variable d'état intensive.

## 1.6 Équilibre thermique entre deux corps et principe zéro de la thermodynamique.

Imaginons que deux solides (A et B) aux températures $T_A$ et $T_B$ respectivement soient mis en contact direct l'un avec l'autre. L'expérience montre qu'après un certain temps les températures des corps A et B seront égales. On dit alors que les deux corps sont en *équilibre thermique*. Si on veut effectuer l'expérience avec des gaz ou des liquides et qu'on veuille éviter le mélange des substances, il faudra naturellement qu'ils soient séparés par une paroi. Une paroi qui permet l'établissement de l'équilibre thermique entre les corps est dite *diatherme*. En contrepartie, une paroi sera qualifiée d'*adiabatique* si la condition d'équilibre thermique n'est pas permise par cette paroi. En conséquence, la température de chaque corps sera indépendante de celle de son voisin.

Considérons maintenant la situation illustrée à la figure 1.14

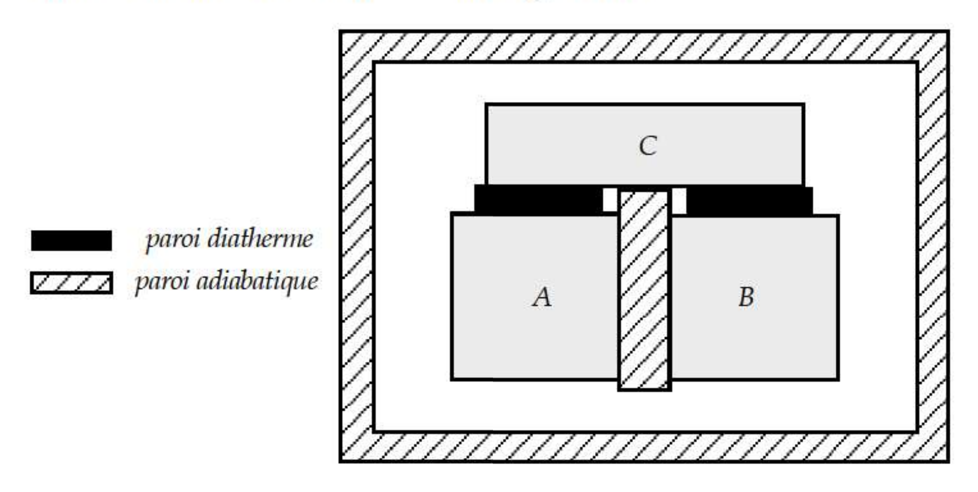



**Figure 1.14** Principe zéro de la thermodynamique : trois corps en équilibre thermique

Les corps *A*, *B* et *C* sont enfermés dans une enceinte adiabatique. Les corps *A* et *B* sont séparés par une paroi adiabatique mais sont tous deux en contact thermique avec le corps C par le biais de parois diathermes. Puisqu'à l'équilibre chacun des corps *A* et *B* est en équilibre thermique avec le corps C ($T_A = T_C$ et $T_B = T_C$), il s'ensuit que *A* et *B* sont en équilibre thermique $(T_A = T_B)$. L'énoncé qui précède constitue le **principe zéro** de la thermodynamique et sert de base conceptuelle à l'utilisation des thermomètres.

## 1.7 EXERCICES

**Problème 1** Soit un ballon sphérique de 5 m de diamètre. Les conditions ambiantes sont de 100 kPa pour la pression et de 20 °C, pour la température.

a) Calculez la masse et le nombre de moles d'air ambiant que déplace le ballon.

b) Si le ballon est rempli d'hélium à 100 kPa et à 20 °C, quels sont la masse et le nombre de moles d'hélium à l'intérieur du ballon ?

Rép. : a) $n$ = 2,69 kmole ; $m$ = 77,8 kg

b) $n$ = 2,69 kmole ; $m$ = 10,75 kg

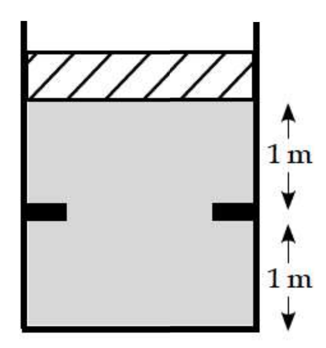
**Problème 2** Un cylindre vertical fermé par un piston sans frottement contient de l'argon à 100 °C. Le piston a une masse de 5 kg et un diamètre de 100 mm; la pression ambiante est de 97 kPa. Si le volume du cylindre est de 2 L, quelle est la masse d'argon qui se trouve à l'intérieur ?

Rép. : $m$ = 2,66 g

**Problème 3** Un cylindre vertical fermé par un piston sans frottement et muni de butées contient de l'air. La section du piston est de 0,2 m$^2$. L'air initialement à 200 kPa et à 500 °C est refroidi par suite d'un échange de chaleur avec le milieu ambiant.

a) Quelle est la température de l'air du cylindre au moment où le piston atteint les butées ?

b) Si le refroidissement est poursuivi jusqu'à ce que la température atteigne 20 °C, quelle est la pression à l'intérieur du cylindre dans ce dernier état ?



Rép. : a) $T_2 = 113,43\,°\text{C}$ b) $P_3 = 151,7\ \text{kPa}$

**Problème 4** Un réservoir rigide *A* de volume de 0,1 m³ est relié à un ballon sphérique et élastique *B*. On sait que la pression à l'intérieur du ballon est directement proportionnelle à son diamètre Le réservoir et le ballon contiennent de l'air à la température ambiante de 25 °C. À l'état initial, la pression dans le réservoir est de 300 kPa alors que le diamètre du ballon est de 0,5 m et sa pression intérieure de 100 kPa. On ouvre le robinet reliant *A* et *B* et on laisse l'équilibre s'établir. La température finale de l'air revient à 25 °C. Déterminez la pression finale dans le système et le volume final du ballon.

Rép. : $P_f = 136,7\ \text{kPa}$

$V_f = 0,167\ \text{m}^3$

**Problème 5** Déterminez s'il est raisonnable de supposer que la substance spécifiée se comporte comme un gaz parfait à l'état indiqué.

a) azote : $T$ = 30 °C, $P$ = 3 MPa ;

b) dioxyde de carbone : $T$ = 30 °C, $P$ = 3 MPa ;

c) eau : $T$ = 1300 °C, $P$ = 3 MPa

d) eau : $T$ = 50 °C, $P$ = 10 kPa

e) eau : $T$ = 30 °C, $P$ = 10 kPa

Rép. : a) oui b) non c) oui d) oui e) non

**Problème 6** Déterminez si, dans pour les états suivants, l'eau est un liquide comprimé (L), une vapeur surchauffée (V) ou un mélange liquide-vapeur (L-V).

a) $T$ = 120 °C, $P$ = 150 kPa ; b) $P$ = 0,35 MPa, $v$ = 0,4 m³/kg ; c) $T$ = 160 °C, $v$ = 0,4 m³/kg ;

d) $P$ = 200 kPa, $T$ = 110 °C ; e) $T$ = 300 °C, $v$ = 0,01 m³/kg ; f) $P$ = 5 kPa, $T$ = 10 °C.

Rép. : a) V ; b) L-V ; c) V ; d) L ; e) L-V ; f) L .

**Problème 7** Pour chacune des substances suivantes et chacun des états indiqués, déterminez le titre si la substance est saturée, ou la température dans le cas de vapeur surchauffée.

a) ammoniac : *i)* $T$ = 20 °C, $v$ = 0,1 m³/kg ; *ii)* $P$ = 800 kPa, $v$ = 0,2 m³/kg

b) R-134a : *i)* $P$ = 400 kPa, $v$ = 0,04 m³/kg ; *ii)* $P$ = 400 kPa, $v$ = 0,060 m³/kg

c) eau : *i)* $T$ = 20 °C, $v$ = 1 m³/kg ; *ii)* $P$ = 8 MPa, $v$ = 0,01 m³/kg.

Rép. a) *i)* $x$ = 0,666 *ii)* $T = 71,3°C$

b) *i)* $x$ = 0,782 *ii)* $T$ = 43,4 °C

c) *i)* $x$ = 0,0173 *ii)* $x$ = 0,3892

**Problème 8** Calculez le volume massique pour chacun des états suivants.

a) ammoniac $T$ = 30 °C, x = 0,15

b) R- 134a $T$ = 48 °C, $x$ = 0,8

c) eau $P$ = 8 MPa ; $x$ = 0,92

Rép. : a) $v = 0{,}018\ \text{m}^3/\text{kg}$ b) $v = 0{,}0129\ \text{m}^3/\text{kg}$ c) $v = 0{,}0217\ \text{m}^3/\text{kg}$

**Problème 9** Un réservoir rigide de 0,1 m³ contient des volumes égaux de liquide et de vapeur de fréon 134a à 34 °C. On doit y introduire du fréon additionnel jusqu'à ce que la masse soit de 80 kg.

a) Quelle masse aura-t-on fait pénétrer dans le réservoir au cours de l'opération ?

b) Si la température finale est de 34 °C, quel sera le volume final de liquide dans le réservoir ?

Rép. : a) $\Delta m = 19{,}26$ kg b) $V_f$ = 0,0670 m³

**Problème 10** Le réservoir $A$ a un volume de 100 L et contient du R-134a à 20 °C. 10% du volume est alors occupé par du liquide et le reste par de la vapeur. Initialement, le réservoir $B$ est vide. Le robinet reliant les réservoirs est ouvert et, au bout d'un moment, l'équilibre s'établit aux conditions de 20 °C et 200 kPa. Quel est le volume du réservoir $B$ ?

Rép. : $V_B$ = 1,583 m³

**Problème 11** Un système piston-cylindre contient du R-134a initialement à 400 kPa, 40 °C et occupant un volume de 0,025 m³ (état 1). Le fréon est refroidi à volume constant jusqu'à -26 °C (état 2) puis chauffé à pression constante jusqu'à ce que le volume double.

a) Calculez la masse du fréon.

b) Pour l'état final (état 3), déterminez les variables suivantes : $P$, $v$, $T$ et $x$ (s'il y a lieu).

c) Illustrez toute l'évolution sur des diagrammes $P$-$v$ et $T$-$v$.

Rép. : a) $m$ = 0,423 kg

b) $P_3 = 102{,}0$ kPa, $T_3 = -26\,°\text{C}$, $v_3 = 0{,}118$ m$^3$/kg, $x_3 = 0{,}627$

**Problème 12** 1 kg d'eau ($H_2O$) est initialement à 200 °C et occupe un volume de 0,1 m³ (état 1). Il est refroidi lors d'une évolution à volume constant jusqu'à ce que la pression atteigne 100 kPa (état 2) puis il est chauffé à pression constante jusqu'à 150 °C (état 3).

a) Pour l'état 2, déterminez $T$, $v$ et $x$ (s'il y a lieu).

b) Pour l'état 3, déterminez $P$, $v$ et $x$ (s'il y a lieu)

c) Illustrez toute l'évolution dans des diagrammes $P$-$v$ et $T$-$v$.

Rép. : a) $T_2 = 99{,}6$ °C, $x_2 = 0{,}0584$, $v_2 = 0{,}1$ m$^3$/kg

b) $P_3 = 100$ kPa, $T_3 = 150$ °C, $v_3 = 1{,}9364$ m$^3$/kg

# CHAPITRE 2

# LE PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

## Table des matières

**2.1 Introduction** **3**

**2.2 Travail** **4**
2.2.1 Travail d'expansion 4
2.2.2 Remarques supplémentaires sur le travail 8
2.2.3 Exemples de calcul de travail d'expansion 9
*2.2.3.1 Évolution isobare* *9*
*2.2.3.2 Évolution* $PV = cte$ *9*
*2.2.3.3 Évolution polytropique* *10*
*2.2.3.4 Travail effectué contre la force exercée par un ressort et la pression atmosphérique* *12*

**2.3 La chaleur** **14**

**2.4 Premier principe de la thermodynamique** **16**
2.4.1 Importance du chemin dans le calcul de la chaleur. 18

**2.5 Enthalpie** **19**

**2.6 Chaleurs spécifiques** **21**

**2.7 L'application du premier principe aux gaz parfaits** **22**

**2.8 Les systèmes en écoulement stationnaire.** **24**
2.8.1 Équation de continuité. 25
2.8.2 Équation d'énergie 25

**2.9 EXERCICES** **27**

## 2.1 Introduction

La conservation de l'énergie mécanique d'un corps rigide était un fait pratiquement établi au début du *XIX*[e] siècle. Mais c'est grâce aux contributions de Mayer et tout particulièrement de Joule que ce principe s'est généralisé aux systèmes thermodynamiques (vers 1840). Aujourd'hui le principe de conservation d'énergie a acquis une reconnaissance telle qu'il constitue une exigence que toute nouvelle théorie physique doit satisfaire pour être prise au sérieux. Comme il a d'abord été énoncé dans le contexte de la thermodynamique, ce principe a été appelé « premier principe de la thermodynamique ». Son champ d'application s'étend, on le sait maintenant à tous les domaines de la physique.

À proprement parler, l'énergie d'un système n'est conservée que si celui-ci est isolé. Énoncer ce fait est équivalent à dire que l'énergie ne peut être produite ou détruite. Elle peut toutefois être transformée sous une autre forme. À titre d'exemple, un corps tombant dans le champ gravitationnel terrestre transforme une portion de son énergie potentielle en énergie cinétique. Si un système interagit avec son environnement, son énergie peut être appelée à changer. Comme l'énergie ne peut être générée ou détruite, il s'ensuit que l'augmentation (ou la diminution) de celle-ci est le résultat d'un transfert de l'environnement vers le système (ou vice-versa). Si $E_i$ et $E_f$ représentent les énergies du système aux états initial et final et $\Delta E_{trans}$, l'énergie transférée de l'environnement vers le système, alors ce qui précède s'exprime mathématiquement par :

$$E_f - E_i = \Delta E_{trans}$$

Il existe deux modes de transfert énergétique: le *travail* et la *chaleur*. Considérons un gaz parfait dans un cylindre fermé par un piston, l'ensemble étant entouré de parois adiabatiques (fig. 2.1 a). Si le piston est déplacé de façon à comprimer le gaz, on observe une élévation de la température, c'est-à-dire (voyez la section 1.6) une augmentation de l'énergie interne du gaz. Le transfert d'énergie s'est effectué par le biais de travail.

Considérons maintenant la situation illustrée à la figure 2.1b. Deux gaz parfaits enfermés dans une enceinte rigide adiabatique sont séparés par une paroi rigide diatherme. Supposons qu'initialement la température du corps *A* soit plus élevée que celle du corps *B*. On sait qu'éventuellement les deux températures s'égaliseront à une valeur intermédiaire comprise entre les valeurs initiales. L'augmentation de la température du gaz *B* traduit donc une augmentation de son énergie interne alors que la diminution de la température du gaz *A* implique que son énergie interne a décru. On parlera en l'occurrence de transfert énergétique (de *A* vers *B*) sous forme de chaleur.

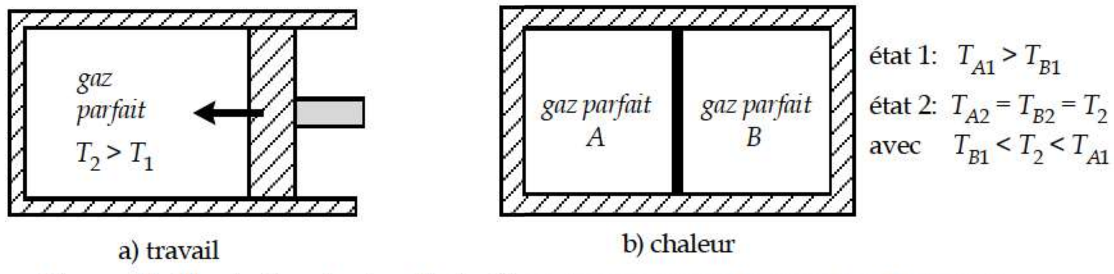



**Figure 2.1** Illustration des transferts d'énergie sous forme de travail et de chaleur

## 2.2 Travail

Quand un agent extérieur au système exerce une force sur une des parties du système et que le point d'application de cette force se déplace, on dit qu'un travail est effectué par la force. Un grand nombre d'interactions entre le système et son environnement peuvent ainsi être considérées comme du travail. À titre d'exemples, on peut penser à :

- la dilatation ou la compression d'un système sous l'effet de forces externes (étirement d'un fil ou compression d'un gaz, par exemple).

- la rotation d'un arbre dans un fluide (turbine hydraulique, par exemple).

- la polarisation d'une substance sous l'effet d'un champ électrique (oscillation des dipôles des molécules d'eau dans un four micro-ondes, par exemple).

- l'aimantation d'un corps (dans le cas d'une bande magnétique, par exemple).

Par définition, le travail (ainsi que la chaleur) est un mode de transfert énergétique entre le système et son environnement; l'énergie doit traverser les frontières délimitant les deux. Ainsi, les forces qui s'exercent entre différentes composantes du système, bien qu'elles donnent lieu à une redistribution de l'énergie entre ces composantes, ne produisent pas de travail. Si on voulait considérer ces forces et leur action en tant que transfert d'énergie, il faudrait redéfinir les limites du système.

La convention de signe pour le travail la plus usuelle en ingénierie est la suivante :

- Si sous l'effet d'un travail, l'énergie est transférée du système vers l'environnement, on dira que le travail est positif $(W > 0)$. On dira aussi que le système fait un travail sur l'environnement.

- En contrepartie si l'énergie transite de l'environnement vers le système (l'environnement fait un travail sur le système), alors le travail sera considéré négatif $(W < 0)$.

### 2.2.1 Travail d'expansion

En thermodynamique, une classe de travail est d'importance particulière : le travail effectué par le système lorsqu'il se dilate (ou se comprime) sous l'effet de forces agissant sur ses frontières. Deux conditions doivent être réunies en l'occurrence :

1) une force externe doit agir sur la frontière du système.

2) le point d'application de la force doit se déplacer, c'est-à-dire que la frontière doit se déformer.

Si l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas satisfaite, aucun travail n'est effectué. La figure 2.2 illustre deux exemples d'évolutions pour lesquelles le travail est nul.

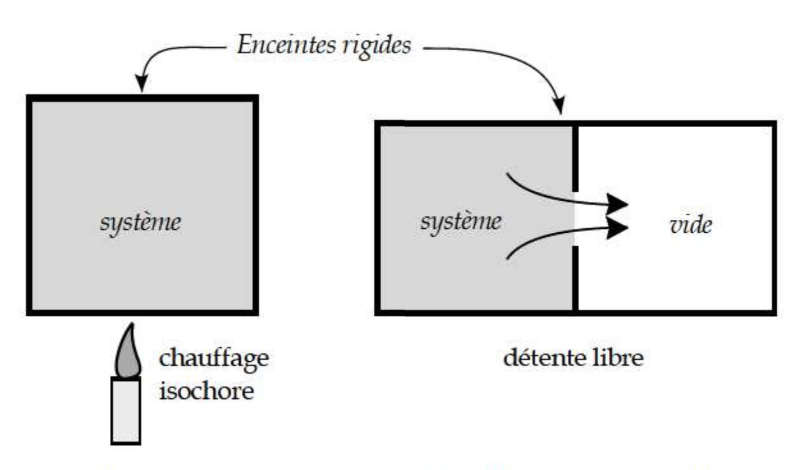



**Figure 2.2** Deux exemples d'évolutions sans travail

À la gauche, a été illustrée la situation où un système ne peut se déformer (évolution isochore). Même si celui-ci est soumis à des forces sur sa frontière (pression exercée par la paroi), aucun travail n'est effectué. À la droite de la figure 2.2, une enceinte rigide est séparée en deux parties par une paroi. Le système est confiné dans une région, alors que l'autre est vide. Quand la paroi est perforée, le système se dilate pour occuper tout le volume. Toutefois, comme aucune force ne s'exerce sur la frontière de droite (la frontière en mouvement), le travail est encore nul.

*Calcul du travail d'expansion.*

Le cylindre de la figure 2.3 est fermé par un piston sans masse de surface A.

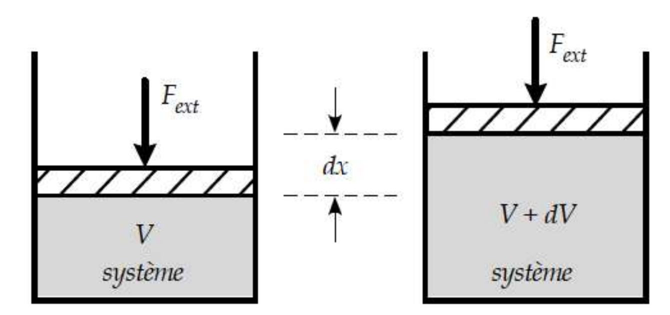



**Figure 2.3** Travail effectué lorsque le système connaît une expansion de $V$ à $V + dV$ .

Pendant que le volume du système passe de $V$ à $V + dV$ , le système effectue un travail car il doit combattre la force exercée par l'environnement $F_{ext}$ pour déplacer le piston. Le travail infinitésimal $\delta W$ sera alors :

$$\delta W = F_{ext}\, dx \tag{2-1}$$

La force $F_{ext}$ est assimilable à une pression, $P_{ext}$ , qui agirait sur le piston de sorte que (2-1) peut s'écrire :

$$\delta W = P_{ext}\ (A dx) \tag{2-2}$$

avec : $F_{ext} = P_{ext} A$

alors : $\delta W = P_{ext} dV$

Si les états initial (1) et final (2) du système sont macroscopiquement distincts (les variables thermodynamiques connaissent une variation finie plutôt qu'infinitésimale), alors le travail total sera obtenu en sommant les travaux infinitésimaux :

$$\boxed{W_{1-2} = \int \delta W = \int_1^2 P_{ext}\, dV} \qquad (2\text{-}3)$$

Bien qu'ayant été démontrées à l'aide du dispositif de la figure 2.3, les relations (2-2) et (2-3) sont tout à fait générales et s'appliquent à toute évolution d'un système connaissant une expansion (ou une compression), quelle que soit sa géométrie. Par ailleurs, aucune condition n'est imposée quant à la nature de $F_{ext}$ (ou de $P_{ext}$). Si, à titre d'exemple, le piston était doté d'une masse et que le déplacement de celui-ci se faisait en combattant à la fois la pression atmosphérique et une force de frottement $F_F$, alors $F_{ext}$ serait :

$$F_{ext} = m_{piston} g + F_F + P_{atm} A$$

et $P_{ext}$ se calculerait par :

$$P_{ext} = \frac{F_{ext}}{A} = \frac{m_{piston} g + F_F}{A} + P_{atm}$$

Remarquons finalement qu'aucune contrainte n'a été imposée sur la façon que le système passe d'un état à l'autre. L'évolution peut être contrôlée ou non, quasi statique ou non. La seule grandeur pertinente est la force totale $F_{ext}$ exercée par l'environnement sur la frontière du système (ou de façon équivalente la « pression » totale $P_{ext}$).

Dans le cas particulier d'une évolution quasi statique, toutefois, le résultat (2-3) prend une forme différente qui la rend attrayante. Comme l'évolution quasi statique est constituée d'une suite d'états d'équilibre et que pour chacun de ceux-ci la condition d'équilibre mécanique doit prévaloir, on peut écrire:

$$P_{ext} = P$$

où $P$ (sans indice) correspond à la pression du système. Les relations (2-2) et (2-3) deviennent alors :

$$\delta W = P\, dV \qquad (2\text{-}4)$$

$$\boxed{W_{1-2} = \int_1^2 P\, dV} \qquad (2\text{-}5)$$

Si l'évolution est alors représentée sur un diagramme *P-V*, on constate que l'aire sous la courbe de l'évolution correspond au travail effectué (figure 2.4)

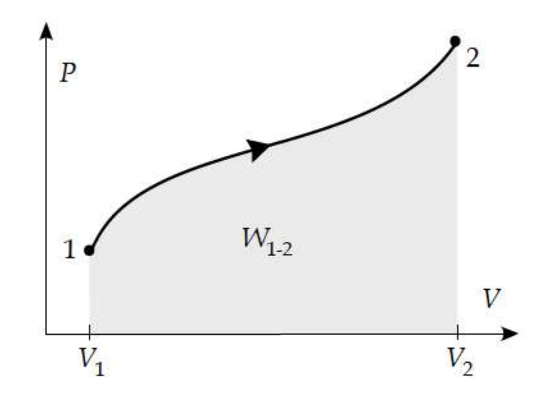



**Figure 2.4** Représentation graphique du travail

Notons qu'une évolution d'expansion (déplacement vers la droite sur le diagramme *P-V* donne lieu à un travail positif alors qu'à une évolution de compression (déplacement vers la gauche sur le diagramme *P-V*) corresponds un travail négatif.

Une évolution cyclique apparaîtra comme une courbe fermée dans un diagramme *P-V* (ainsi que dans tout autre diagramme d'ailleurs). Le travail total effectué, le travail net $(W_{net})$, correspondra alors à la surface intérieure délimitée par la courbe (figure 2.5).

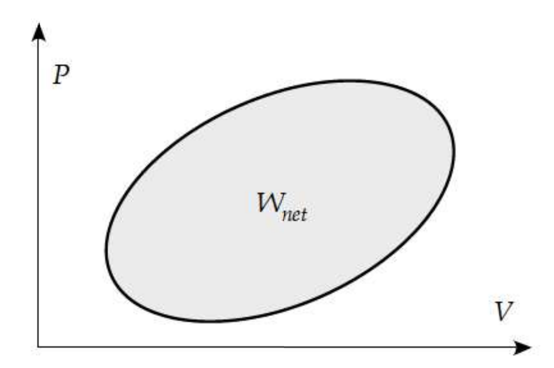



**Figure 2.5** Travail net effectué lors d'un cycle

On constate aisément que si la courbe est parcourue dans le sens horaire, le travail net est positif (fait par le système), et que si elle est parcourue dans le sens antihoraire, le travail net est négatif (fait par l'environnement).

### 2.2.2 Remarques supplémentaires sur le travail

À la figure 2.6 sont illustrées deux évolutions ($A$ et $B$) joignant les mêmes points initial et final.

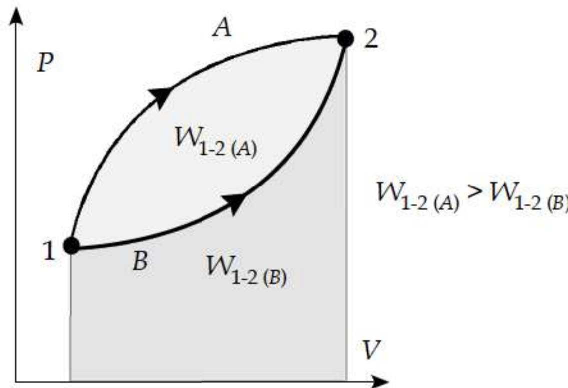



**Figure 2.6** Le travail dépend du chemin emprunté

On voit d'emblée que les travaux effectués dans les deux cas diffèrent. En fait :

$$W_{1-2(A)} > W_{1-2(B)}$$

On dit alors que la grandeur du travail dépend du chemin emprunté (c'est-à-dire qu'il dépend du processus qui amène le système de l'état 1 à l'état 2). En contrepartie, les variations de pression ou de volume sont toujours les mêmes quel que soit le chemin. Ce qui précède montre que le travail n'est pas une propriété du système mais qu'il dépend du *type d'interaction* entre le système et son environnement. C'est d'ailleurs ce qui explique la différence dans le formalisme utilisé pour désigner les infinitésimaux associés au travail d'une part, $\delta W$, et aux variables d'état d'autre part, $dV$, $dP$, $dT$, etc.

Pour représenter une variation infinitésimale de volume on écrira $dV$ et la somme de ces infinitésimaux (l'intégrale) donnera une variation de volume finie :

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = V_2 - V_1$$

Ce type de différentielle est dénommée *différentielle exacte* car son intégrale donne toujours le même résultat quel que soit le chemin emprunté. Pour désigner une grandeur infinitésimale de travail, on écrira plutôt $\delta W$ pour marquer la distinction entre ce type de différentielle et la différentielle exacte. Alors :

$$\int_1^2 \delta W = W_{1-2} \neq W_2 - W_1$$

### 2.2.3 Exemples de calcul de travail d'expansion

#### 2.2.3.1 *Évolution isobare*

L'évolution isobare est caractérisée par $P = cte$ durant toute l'évolution.

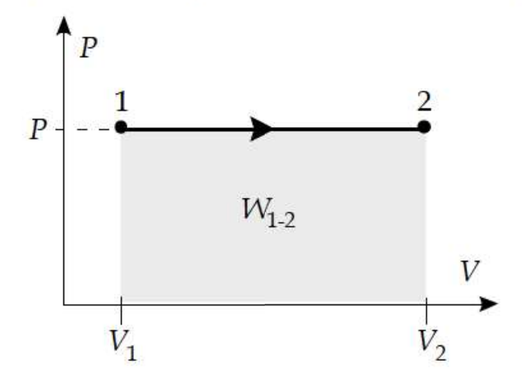



**Figure 2.7** Travail effectué lors d'une évolution isobare

$$W_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P(V_2 - V_1) \tag{2-6}$$

#### 2.2.3.2 *Évolution* $PV = cte$

Désignons la constante par $a$ :

$$PV = a \;\Rightarrow\; P = \frac{a}{V}$$

La figure 2.8 illustre la dépendance de la pression en fonction du volume ainsi que le travail effectué.

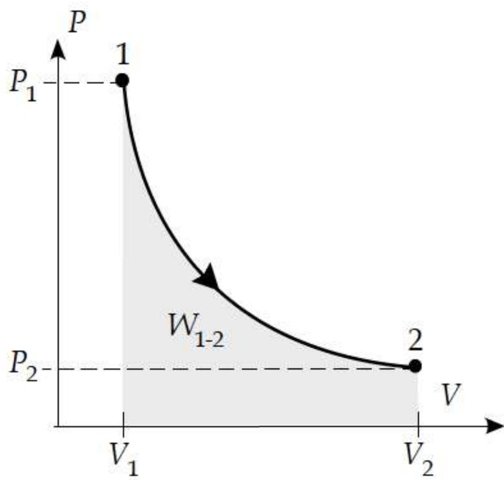



Figure 2.8 Travail effectué lors d'une évolution $PV = cte$.

Ainsi : $$W_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V} dV = a \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Or : $$P_1 V_1 = P_2 V_2 = a$$

$$W_{1-2} = P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = P_2 V_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \tag{2-7}$$

Si, ***de plus***, la substance est un gaz parfait :

$$PV = mRT = cte \qquad \text{(évolution isotherme)}$$

alors

$$W_{1-2} = mRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \tag{2-8}$$

### 2.2.3.3 *Évolution polytropique*

Une évolution polytropique est caractérisée par la relation suivante entre la pression et le volume.

$$PV^n = cte$$

Si $b$ est cette constante : $$P = bV^{-n}$$

Notons qu'on ne peut *a priori* se représenter graphiquement l'évolution puisque son allure dépendra de $n$. La figure 2.9 illustre deux évolutions de ce type avec $n$ = 2 et $n$ = -2, respectivement.

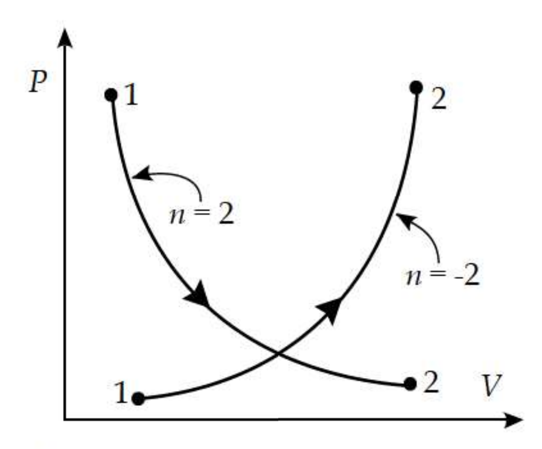



**Figure 2.9** Deux évolutions polytropiques avec $n$ = 2 et $n$ = -2

L'équation (2-5) conduit à : $W_{1-2} = b\left[\dfrac{V_2^{-n+1} - V_1^{-n+1}}{1-n}\right]$

mais puisque $b = P_1 V_1^{\ n} = P_2 V_2^{\ n}$,

on trouve :

$$W_{1-2} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-n} \tag{2-9}$$

Si ***de plus*** la substance est un gaz parfait,

$$P_1 V_1 = mRT_1; \quad P_2 V_2 = mRT_2$$

$$W_{1-2} = mR\left(\frac{T_2 - T_1}{1-n}\right) \tag{2-10}$$

Pour un gaz parfait connaissant une évolution polytropique, on peut d'ailleurs établir une paire de relations utiles.

On sait que : $\dfrac{P_1 V_1}{T_1} = \dfrac{P_2 V_2}{T_2}$ (gaz parfait)

et que : $\dfrac{P_1}{P_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^n$ (évolution polytropique)

Ainsi : $\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right) = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^n$

C'est-à-dire : $\Rightarrow \quad \dfrac{T_2}{T_1} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{1-n}$ (2-11)

De plus : $\dfrac{P_1}{P_2} = \left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)^n \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^n$

Alors : $\Rightarrow \quad \dfrac{T_2}{T_1} = \left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ (2-12)

### 2.2.3.4 *Travail effectué contre la force exercée par un ressort et la pression atmosphérique*

On sait que la force exercée par un ressort (idéal) est proportionnelle à la déformation $x$ du ressort :

$$F = -kx \quad \text{avec} \quad x = l - l_0$$

où $l$ : longueur du ressort
$l_0$ : longueur au repos du ressort (lorsqu'il est ni étiré ni comprimé).

Considérons un système placé sous un piston de surface A aux deux états suivants (figure 2.10)

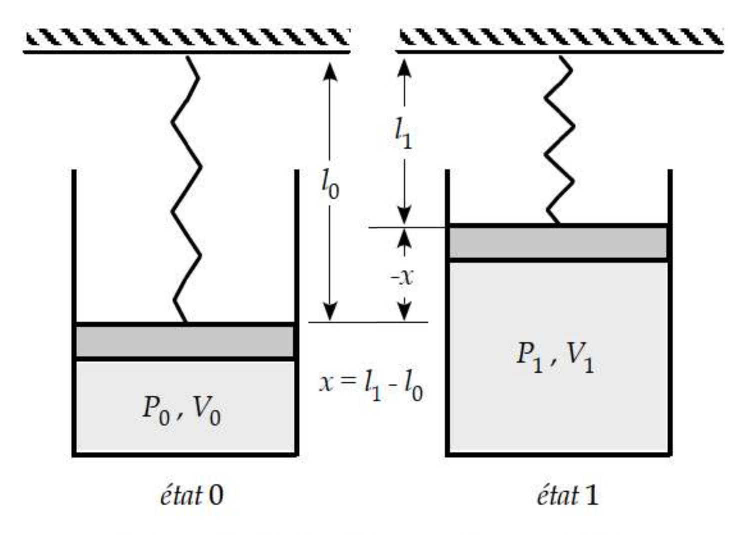



**Figure 2.10** Action d'un ressort sur un piston

L'état 0 est l'état pour lequel le ressort n'agit pas c'est-à-dire pour lequel $l = l_0$. La pression du système correspond alors à la pression atmosphérique $P_0$. Désignons par $V_0$, le volume à cet état. Si le système se dilate et est amené à l'état 1, le ressort est comprimé et exerce une force sur le piston donnée par

$$F_{r1} = -k(l_1 - l_0) = +k\left(\frac{V_1 - V_0}{A}\right)$$

Cette force contribue à augmenter la pression du système qui vaut maintenant :

$$P_1 = P_o + \frac{F_{r1}}{A}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{k}{A^2}(V_1 - V_0)$$

Comme l'état 1 est quelconque, on peut écrire en général :

$$P = P_0 + \frac{k}{A^2}(V - V_0) \tag{2-13}$$

La figure 2.11 représente une évolution de ce type sur un diagramme *P-V*.

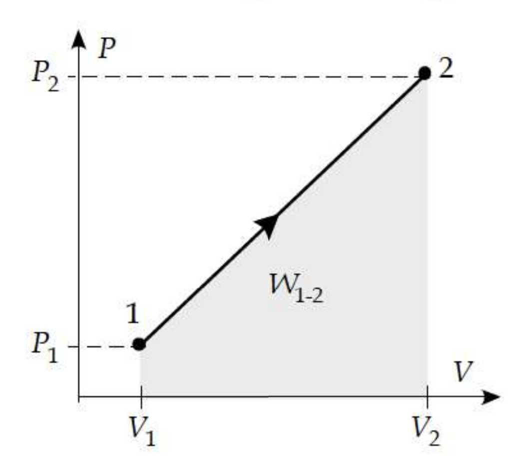



**Figure 2.11** Travail effectué lors d'une évolution linéaire

En conséquence, le travail effectué entre les états 1 et 2 (figure 2.11) s'obtient par :

$$W_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} \left( P_0 + \frac{k}{A^2}(V - V_0) \right) dV$$

$$W_{1-2} = \left( \frac{P_1 + P_2}{2} \right)(V_2 - V_1) \qquad (2\text{-}14)$$

**Exemple 2.1 :** Un ensemble cylindre-piston contient 4 kg d'eau à 35 °C et occupant un volume de 30 L. À cet état, le piston repose sur des butées. Le piston a une aire de 0,06 m² et une masse telle qu'il faut une pression de 300 kPa pour le soulever à la pression ambiante. Lorsque le piston est soulevé jusqu'à un point où le volume est de 75 L, il rencontre un ressort de constante $k$ = 360 kN/m. Si on chauffe le système jusqu'à ce que la pression finale atteigne 7 MPa, déterminez :

a) les variables de l'état final : $v_4$, $T_4$.

b) le travail effectué pendant l'évolution.

*Solution*

évolution 1-2 : isochore ; $V = cte$ (jusqu'à $P_2 = 300$ kPa)

évolution 2-3 : isobare : $P = cte$ (jusqu'à $V_3 = 75$ L)

évolution 3-4 $P = P_0 + \frac{k}{A^2}(V - V_0)$ (jusqu'à $P_4 = 7$ MPa)

| **État 1** | **État 2** | **État 3** | **État 4** |
|---|---|---|---|
| $V_1$ = 30 L | $V_2$ = 30 L | $V_3$ = 75 L | $V_4$ = 142 L |
| $T_1$ = 35 °C | $T_2$ = 133,55 °C | $T_3$ = 133,55 °C | $T_4$ = 352,8 °C |
| $P_1$ = 5,6 kPa | $P_2$ = 300 kPa | $P_3$ = 300 kPa | $P_4$ = 7 MPa |
| $v_1$ = 0,0075 m³/kg | $v_1$ = 0,0075 m³/kg | $v_1$ = 0,01875 m³/kg | $v_1$ = 0,0355 m³/kg |

a) Sachant que l'évolution 3-4 est une évolution linéaire avec ressort :

$$P_4 = P_3 + \left(\frac{k}{A^2}\right)(V_4 - V_3)$$

On trouve $V_4$ :

$$V_4 = \frac{P_4 - P_3}{\left(\frac{k}{A^2}\right)} + V_3 = 142 \text{ L}$$

et :

$$v_4 = 0{,}03555 \text{ m}^3/\text{kg} > v_g(7 \text{ MPa}) \qquad \text{(vapeur surchauffée)}$$

Alors:

$$T_4 = 352{,}8^\circ C$$

b)

$$W_{1-4} = W_{1-2} + W_{2-3} + W_{3-4}$$

$$W_{1-2} = 0 \qquad \text{(isochore)}$$

$$W_{2-3} = P_2(V_3 - V_2) = 13{,}5\text{kJ} \qquad \text{(isobare)}$$

$$W_{3-4} = \frac{(P_3 + P_4)}{2}(V_4 - V_3) = 244{,}55 \text{ kJ} \qquad \text{(ressort)}$$

Et :

$$W_{1-4} = 258{,}1 \text{ kJ}$$

## 2.3 La chaleur

Nous l'avons vu antérieurement, il existe une autre façon de fournir de l'énergie à un système : par chaleur. On considère généralement qu'il existe trois modes de transfert de chaleur : la conduction (thermique), la convection et la radiation. S'il existe une différence de température entre deux points d'un milieu, l'agitation thermique plus importante de la partie à haute température se transmettra de proche en proche à la région de basse température, c'est le

phénomène de conduction. Si cette différence de température existe dans un milieu fluide, le phénomène de conduction s'accompagne souvent de déplacements de matière au sein du fluide (des « courants »). Ce transport de matière s'accompagne de transfert d'énergie qui s'effectue de la région à plus haute température vers la région de température inférieure : on parle alors de convection. Finalement, tout corps porté à une certaine température émet du rayonnement électromagnétique : c'est le phénomène de radiation. Une caractéristique commune aux trois modes de transfert de chaleur est le fait que l'énergie voyage toujours de la région de plus haute température vers la région de plus basse température. Cette observation peut servir de définition opérationnelle pour la chaleur : si de l'énergie traverse les frontières d'un système en raison d'une différence de température entre celui-ci et son environnement, alors il y a transfert de chaleur. La convention de signe associée au transfert de chaleur stipule que de l'énergie absorbée par le système correspond à une chaleur positive $(Q>0)$. La chaleur rejetée par le système vers l'environnement sera donc considérée négative $(Q<0)$.

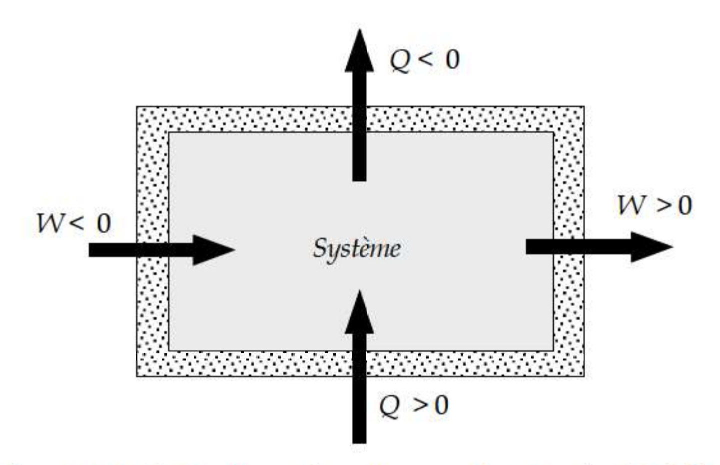



**Figure 2.12** Conventions de signes pour le travail et la chaleur

Nous montrerons par la suite qu'à l'instar du travail, la quantité de chaleur absorbée (ou rejetée) est dépendante du processus faisant évoluer le système de son état initial vers son état final (dépendante du chemin). La chaleur infinitésimale s'écrira alors $\delta Q$, et on aura pour la chaleur totale, $Q_{1\text{-}2}$ :

$$Q_{1-2} = \int \delta Q \qquad (2\text{-}15)$$

Si l'évolution est cyclique, la chaleur nette transférée s'écrit donc :

$$Q_{net} = \oint \delta Q \qquad (2\text{-}16)$$

Finalement, on dira d'une évolution qu'elle est *adiabatique* si elle s'effectue sans transfert de chaleur $(Q_{1-2} = 0)$.

## 2.4 Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique (principe de conservation d'énergie) postule que lorsqu'un système change d'état, son énergie ne peut être modifiée que par un apport d'énergie provenant de son environnement. Les modes de transfert énergétiques sont le travail et la chaleur, et en vertu des conventions de signes qu'on leur a assignées, on aura :

$$E_2 - E_1 = Q_{1-2} - W_{1-2} \tag{2-17}$$

Pour une évolution cyclique, les états initial et final sont les mêmes $(E_2 = E_1)$ et on tire :

$$\boxed{Q_{net} = W_{net}} \tag{2-18}$$

Au chapitre 1 on a vu que l'énergie totale, *E*, est souvent représentée comme une somme de trois termes :

$$E = mgz_{CM} + \frac{1}{2}mV_{CM}^2 + U$$

Pour la majorité des applications en thermodynamique, les variations d'énergie potentielle de gravité et d'énergie cinétique associée au déplacement du centre de masse sont nulles ou négligeables. Le premier principe s'écrira alors :

$$\boxed{U_2 - U_1 = Q_{1-2} - W_{1-2}} \tag{2-19}$$

Toutes les grandeurs de l'équation (2-19) sont proportionnelles à la masse du système (variables extensives), on peut donc diviser de part et d'autre par la masse pour obtenir

$$u_2 - u_1 = q_{1-2} - w_{1-2} \tag{2-20}$$

où : $u = \dfrac{U}{m}$ (énergie interne massique)

$q_{1-2} = \dfrac{Q_{1-2}}{m}$ (chaleur massique)

$w_{1-2} = \dfrac{W_{1-2}}{m}$ (travail massique)

Dans le cas d'une évolution infinitésimale, c'est-à-dire lorsque les états sont infiniment proches l'une de l'autre, le premier principe prend les formes suivantes :

$$dU = \delta Q - \delta W \tag{2-21}$$

$$du = \delta q - \delta w \tag{2-22}$$

Dans certains cas il est utile d'établir le taux de variation de l'énergie du système, $dU/dt$. Si l'évolution infinitésimale considérée plus haut prend $\delta t$ pour s'accomplir alors :

$$\frac{dU}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{dU}{\delta t} = \frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W}{\delta t}$$

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} \tag{2-23}$$

$\dot{Q}$ : taux de transmission de chaleur (équivalent à une puissance)

$\dot{W}$ : puissance

**Exemple 2.2**: Un réservoir rigide est divisé en deux parties égales par une membrane (figure 2.13). Initialement, la partie $A$ du réservoir contient 10 kg d'eau à 300 kPa et 20 °C, l'autre moitié étant évacuée. La membrane est alors enlevée et l'eau emplit tout le réservoir. Si l'eau revient à sa température initiale de 20 °C, déterminez :

a) le volume du réservoir ;
b) la pression finale ;
c) le transfert de chaleur pour ce processus.

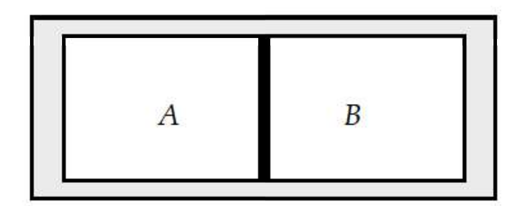



**Figure 2.13** Exemple 2.2

*Solution*

On constate : détente libre, donc $W_{12} = 0$

a)

État 1 $\begin{cases} P_1 = 300 \text{ kPa} \\ T_1 = 20 \text{ °C} \end{cases}$ ; $P_1 > P_s(20 \text{ °C})$ , l'eau est à l'état de liquide comprimé.

$$v_1 = v_f(20 \text{ °C}) = 0{,}001002 \text{ m}^3/\text{kg}$$
$$V_1 = mv_f = 0{,}010 \text{ m}^3$$
$$V_{réservoir} = V_2 = 2V_1 = 0{,}020 \text{ m}^3$$

b) $$v_2 = \frac{V_2}{m} = 0{,}002 \text{ m}^3/\text{kg}$$

État 2 $\begin{cases} T_2 = 20\ °\text{C} \\ v_2 = 0{,}002\ \text{m}^3/\text{kg} \end{cases}$ ; $v_f < v_2 < v_g$, l'eau est un mélange liquide-vapeur

Donc $P_2 = P_S(20\ °\text{C}) = 2{,}339\ \text{kPa}$

c) *Transfert de chaleur* $Q_{1-2} = m(u_2 - u_1) + W_{1-2}$

$$u_1 = u_f(20\,°\text{C}) = 83{,}95\,kJ/kg$$
$$u_2 = u_f + x_2\,u_{fg}$$

*Calcul du titre :* $x_2 = \dfrac{(v_2 - v_f)}{(v_g - v_f)} = 0{,}00002$

et $u_2 = 83{,}99\ kJ/kg$

Puisque $W_{1-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{1-2} = m(u_2 - u_1)$

$$Q_{1-2} = 10\,(83{,}99 - 83{,}95) = +0{,}4\ \text{kJ}$$

Le système a **reçu** 0,4 kJ.

### 2.4.1 Importance du chemin dans le calcul de la chaleur.

Plus haut nous avons fait mention de la dépendance de la grandeur de la chaleur échangée en fonction du processus utilisé pour amener le système de son état initial à son état final. La figure 2.14 illustre deux évolutions distinctes (A et B) reliant les mêmes états.

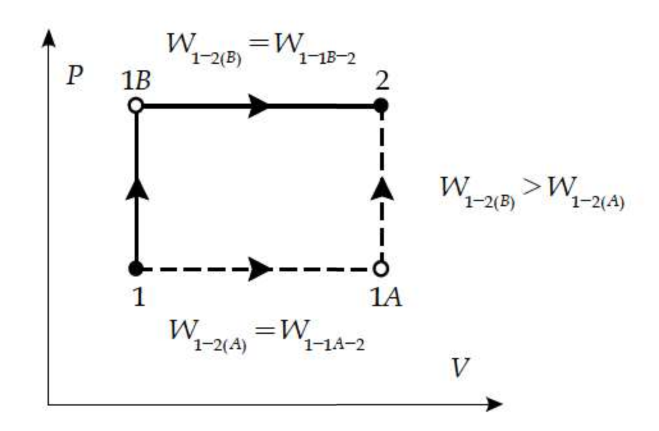



**Figure 2.14** Deux évolutions distinctes reliant les états 1 et 2.

L'évolution *A* est constituée d'une évolution isobare (1-1*A*) d'abord, et d'une évolution isochore (1*A*-2), ensuite. L'évolution *B* est constituée des deux mêmes évolutions mais pour lesquelles l'ordre a été inversé. On constate (tel que prévu) que le travail effectué lors de l'évolution *B* est plus important que celui effectué dans le cadre de l'évolution *A*.

En vertu du premier principe on peut écrire

$$U_2 - U_1 = Q_{1-2(A)} - W_{1-2(A)}$$
$$U_2 - U_1 = Q_{1-2(B)} - W_{1-2(B)}$$

Mais l'énergie est une propriété du système (variable d'état). En conséquence, $U_2 - U_1$, est indépendant du chemin emprunté (de l'évolution) et on doit avoir :

$$Q_{1-2\,(A)} - W_{1-2\,(A)} = Q_{1-2\,(B)} - W_{1-2\,(B)}$$

Puisque les travaux effectués diffèrent, il s'ensuit qu'il en est de même des chaleurs. Dans notre cas on aura :

$$Q_{1-2(A)} > Q_{1-2\,(B)}$$

La chaleur échangée est donc fonction du chemin emprunté : ce dernier doit être spécifié.

## 2.5 Enthalpie

Pour certaines applications, notamment dans le cas d'écoulements, il est utile de définir la grandeur enthalpie $H$ :

$$H = U + PV \tag{2-24}$$

ainsi que l'enthalpie massique, $h$ :

$$h = u + Pv \tag{2-25}$$

Notons que l'enthalpie est définie simplement parce que l'on juge utile d'assigner un symbole à l'expression $U + PV$ qui se retrouve fréquemment en thermodynamique. Par ailleurs, puisque la définition de l'enthalpie ne fait intervenir que des variables d'état, il s'ensuit que l'enthalpie en est une aussi.

$H$ est une variable extensive. De ce fait, on aura pour un mélange liquide-vapeur :

$$h = h_f + x\, h_{fg}$$

Considérons maintenant un exemple d'application du concept d'enthalpie. Soit une évolution isobare reliant les états 1 et 2. On a, en vertu du premier principe :

$$Q_{1-2} = (U_2 - U_1) + W_{1-2}$$

Mais, $$W_{1-2} = P(V_2 - V_1) = P_2V_2 - P_1V_1$$

Alors : $$Q_{1-2} = (U_2 + P_2V_2) - (U_1 + P_1V_1) = H_2 - H_1$$

Ainsi, la chaleur échangée lors d'un **processus isobare** correspond à la variation d'enthalpie du système (dans la mesure que le travail est un travail d'expansion seulement).

**Exemple 2.3 :** Un ensemble piston-cylindre contient 50 g d'eau vapeur saturée maintenue à une pression constante de 300 kPa. Une résistance électrique placée dans le cylindre chauffe la substance durant 5 minutes à l'aide d'un courant $I$ = 0,2A sous une tension $\mathcal{V}$ de 120 V. Durant ce processus l'eau perd, d'autre part, 4kJ de chaleur à travers les parois du cylindre. Considérant l'eau comme système établissez :

a) la chaleur totale échangée et la variation d'enthalpie du système ;
b) la température finale de la substance.

*Solution*

a) *Calcul de la chaleur*

La puissance dissipée par la résistance sous forme de chaleur est donnée par le produit de la tension et du courant électrique. Ainsi la chaleur totale $Q_{1-2(R)}$ fournie par la résistance au système :

$$Q_{1-2(R)} = \mathcal{V} I \Delta t = (120)(5)(5 \times 60) = 7{,}2 \text{ kJ}$$

Si $Q_{1-2(P)}$ désigne la chaleur (négative, ici) qui traverse les parois du cylindre :

$$Q_{1-2} = Q_{1-2R} + Q_{1-2P} = 7{,}2 - 4 = 3{,}2 \text{ kJ}$$

Puisqu'il s'agit d'une transformation isobare et que le seul travail est un travail d'expansion,

$$Q_{1-2} = H_2 - H_1 = 3{,}2 \text{ kJ}$$

b)

$$\text{État 1} \begin{cases} P_1 = 300 \text{ kPa} \\ x_1 = 1 \end{cases} \quad ; \quad h_1 = h_g(300 \text{ kPa}) = 2725{,}3 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{État 2} \begin{cases} P_2 = P_1 = 300 \text{ kPa} \\ h_2 = h_1 + \dfrac{\Delta H}{m} = 2725{,}3 + \dfrac{3{,}2}{0.05} = 2789{,}3 \text{ kJ/kg} \end{cases}$$

or : $h_2 > h_g(300 \text{ kPa})$ vapeur surchauffée

On trouve donc : $T_2 = 163{,}6$ °C

## 2.6 Chaleurs spécifiques

La chaleur spécifique représente la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température d'une substance de un degré dans des conditions spécifiées ($V = cte$, $P = cte$, etc...). Comme la chaleur est une grandeur extensive, on a jugé utile de définir les chaleurs spécifiques pour un kilogramme de substance ou une mole de substance $\left(C, \overline{C}\right)$. Dans ce texte nous entendons par chaleur spécifique, la chaleur spécifique massique.

La chaleur spécifique si la variable $y$ est maintenue constante est définie par :

$$C_y \triangleq \left(\frac{\delta q}{dT}\right)_y \tag{2-26}$$

D'autre part le premier principe stipule que :

$$\delta q = du + \delta w$$

Si le travail est un travail d'expansion (quasi statique) :

$$\delta w = Pdv$$

De sorte que :

$$\delta q = du + Pdv \tag{2-27}$$

Les chaleurs spécifiques les plus couramment utilisées sont les chaleurs spécifiques à volume constant et à pression constante $(C_V, C_P)$. Pour une évolution isochore $(V = cte)$

$$\delta q = du$$

$$C_V = \left(\frac{\delta q}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V$$

Alors :

$$C_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V \tag{2-28}$$

Par ailleurs :

$$h = u + Pv$$

$$dh = du + Pdv + vdP$$

$$\delta q = dh - vdP \tag{2-29}$$

Ainsi pour une évolution isobare $(P = cte)$

$$\delta q = dh$$
$$C_P = \left(\frac{\delta q}{dT}\right)_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P$$

Alors :

$$C_P = \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_P \tag{2-30}$$

Les variations d'énergie interne et d'enthalpie massiques s'obtiennent alors en intégrant les équations (2-28) et (2-30).

$$u_2 - u_1 = \left[\int_{T_1}^{T_2} C_V dT\right]_V \tag{2-31}$$
$$h_2 - h_1 = \left[\int_{T_1}^{T_2} C_P \; dT\right]_P \tag{2-32}$$

Les indices $V$ et $P$ des résultats indiquent que les équations (2-31) et (2-32) s'appliquent aux évolutions isochore et isobare respectivement.

## 2.7 L'application du premier principe aux gaz parfaits

Nous avons déjà établi que l'énergie interne d'un gaz dépendait seulement de la température.

$$u = u(T)$$

De plus, puisque : $Pv = RT$ et $h = u + Pv$

$$h = u + RT = h(T) \tag{2-33}$$

Ainsi l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépend elle aussi que de la température. En conséquence, les équations (2-28) et (2-30) deviennent pour un gaz parfait :

$$C_V = \frac{du}{dT} \tag{2-34}$$
$$C_P = \frac{dh}{dT} \tag{2-35}$$

Notons que les dérivés partielles sont remplacés par des dérivées totales et que les références au type de processus (indices $V$ et $P$) ont disparu. En conséquence les équations (2-34) et (2-35) sont valables pour toutes évolutions quel qu'elles soient. Ces résultats sont très importants en ce qu'ils constituent le fondement de l'application du premier principe aux gaz parfaits. Notons d'abord qu'en dérivant l'équation (2-33) de part et d'autre par rapport à la température on obtient :

$$\frac{dh}{dT} = \frac{du}{dT} + R$$

$$C_P = C_V + R \tag{2-36}$$

Les équations (2-34) et (2-35) peuvent être intégrées sans égard à l'évolution que connaît le système.

$$du = C_V \; dT$$
$$u_2 - u_1 = \int_{T_2}^{T_1} C_V(T)\, dT \tag{2-37}$$

et :

$$dh = C_P \, dT$$
$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_P(T)\, dT \tag{2-38}$$

$C_V$ et $C_P$ dépendent en général de la température. La figure 2.15 illustre les graphes de $C_P(T)$ et $C_V(T)$ pour l'azote gazeux entre 300 K et 3000 K

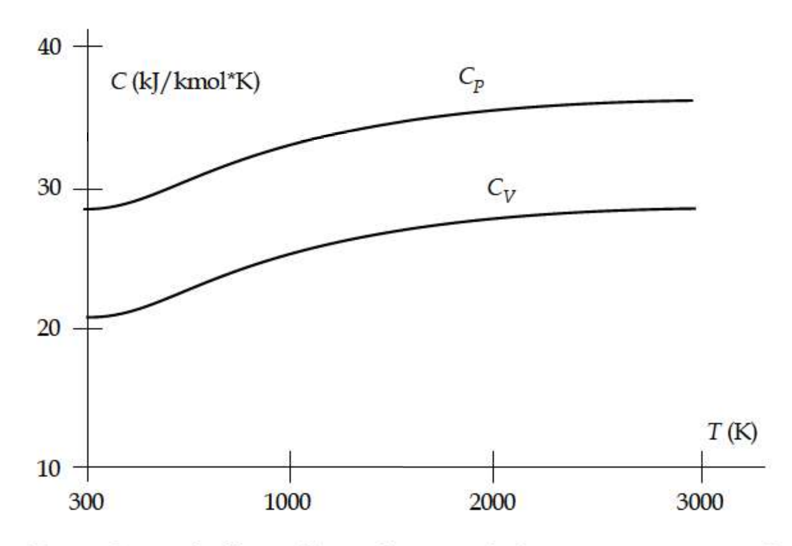



**Figure 2.15** Dépendance de $C_P$ et $C_V$ en fonction de la température pour l'azote gazeux

On remarque que les chaleurs spécifiques varient relativement peu sur un intervalle de température restreint. D'ailleurs, sur l'ensemble de l'intervalle considéré, la variation n'est que d'environ 25% alors que la température est multipliée par un facteur dix. Il est donc d'usage de les considérer constantes si l'intervalle de température n'est pas trop important. Les équations (2-37) et (2-38) donnent alors :

$$u_2 - u_1 = C_V(T_2 - T_1) \tag{2-39}$$
$$h_2 - h_1 = C_P(T_2 - T_1) \tag{2-40}$$

Le tableau A.8 fournit les grandeurs de ces chaleurs spécifiques pour différents gaz à la température de 300 K.

*Résultat important*

Nous pouvons maintenant établir un résultat particulièrement important. Pour une substance connaissant une évolution quasi statique, nous avons établi que le premier principe s'écrit (équations (2-27) et (2-29)):

$$\delta q = du + Pdv$$

et

$$dh = \delta q + vdP$$

Si, par ailleurs, l'évolution est aussi adiabatique, il vient :

$$du = -Pdv$$
$$dh = vdP$$

Dans le cas d'un gaz parfait on peut écrire :

$$du = C_V dT = -Pdv \qquad (2\text{-}41)$$
$$dh = C_P dT = vdP \qquad (2\text{-}42)$$

En divisant l'équation (2-42) par l'équation (2-41) :

$$\frac{C_P}{C_V} = \left(\frac{-v}{dv}\right)\left(\frac{dP}{P}\right)$$

Si on définit le rapport des chaleurs spécifiques, $k$ :

$$k = \frac{C_P}{C_V} \qquad (2\text{-}43)$$
$$-k\left(\frac{dv}{v}\right) = \frac{dP}{P} \qquad (2\text{-}44)$$

Si l'équation (2-44) est intégrée de part et d'autre, on trouve

$$-k\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

qui conduit à :

$$P_1 {v_1}^k = P_2 {v_2}^k \qquad (2\text{-}45)$$

Nous reconnaissons la forme du résultat (2-45) comme étant celle qui caractérise une évolution polytropique d'exposant $k$. Ainsi, un gaz parfait connaissant une évolution adiabatique quasi statique, se transformera conformément à la loi :

$$Pv^k = cte \qquad (2\text{-}46)$$

## 2.8 Les systèmes en écoulement stationnaire.

Nous avons établi aux chapitres 4 et 5 de la mécanique des fluides les équations fondamentales régissant le comportement de ceux-ci. Pour les applications que nous considérerons par la suite, deux de ces équations seront utilisées.

### 2.8.1 Équation de continuité.

Pour un système en écoulement stationnaire nous avons établi l'équation 4-4 de la section 4.2.2 de la mécanique des fluides :

$$\sum_e \dot{m} = \sum_s \dot{m} \tag{2-47}$$

où $\dot{m}$ : débit massique en kg/s et les indices $e$ et $s$ réfèrent aux entrées et sorties du volume de contrôle respectivement.

### 2.8.2 Équation d'énergie

L'équation d'énergie présentée à la section 5.4 de la mécanique des fluides représente la formulation du premier principe pour les écoulements stationnaires. L'équation 5-11 en mécanique des fluides s'écrivait :

$$\dot{Q} - \dot{W}_\tau - \dot{W}_{VC} = \sum_s \dot{m}\left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g\,z\right) - \sum_e \dot{m}\left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g\,z\right)$$

Pour un fluide en écoulement dans une conduite (ou de façon plus générale, à l'intérieur d'une enceinte), on peut toujours choisir le volume de contrôle de façon à ce que la puissance dissipée pour combattre les forces de frottement visqueux, $\dot{W}_\tau$, soit nulle. Ainsi, posant $\dot{W}_\tau = 0$ et remarquant que : $v = \dfrac{1}{\rho}$, l'équation d'énergie devient :

$$\dot{Q} - \dot{W}_{VC} = \sum_P \dot{m}\left(u + Pv + \frac{V^2}{2} + g\,z\right) - \sum_e \dot{m}\left(u + Pv + \frac{V^2}{2} + g\,z\right)$$

or : $h = u + Pv$

$$\dot{Q} - \dot{W}_{VC} = \sum_s \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + g\,z\right) - \sum_e \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + g\,z\right) \tag{2-48}$$

où : $\dot{W}_{VC} = \dot{W}_T + \dot{W}_P$

avec : $\dot{W}_T$ : puissance développée par une turbine
$\dot{W}_P$ : puissance utilisée par une pompe.

Pour la plupart des applications que nous rencontrerons par la suite, les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de gravité pourront être négligées et l'équation (2-48) s'écrira :

$$\dot{Q} - \dot{W}_{VC} = \sum_s \dot{m}h - \sum_e \dot{m}h \tag{2-49}$$

Finalement, si le volume de contrôle ne comporte qu'une entrée et qu'une sortie l'équation (2-49) se simplifie plus avant :

$$\dot{Q} - \dot{W}_{VC} = \dot{m}(h_s - h_e)$$

$$q - w_{VC} = h_s - h_e \tag{2-50}$$

## 2.9 EXERCICES

**Problème 1** Un cylindre fermé par un piston sans frottement contient 5 kg de vapeur d'eau surchauffée à 1 MPa et 250 C. On refroidit le système à pression constante jusqu'à ce que l'eau atteigne un titre de 50%. Calculez le travail qui s'effectue au cours de l'évolution.

$$\text{Rép. : } W_{1-2} = -674{,}6 \text{ kJ}$$

**Problème 2** Un dixième de kilogramme d'oxygène à 150 kPa et 20 °C est retenu dans un cylindre fermé par un piston. On dépose lentement des poids sur le piston et on comprime le gaz à température constante jusqu'à ce que la pression finale soit de 600 kPa. Calculez le travail qui s'effectue au cours de l'évolution.

$$\text{Rép. : } W_{1-2} = -10{,}6 \text{ kJ}$$

**Problème 3** De l'air (gaz parfait) à 100 kPa et 20 °C occupe un volume de 0,5 $m^3$. Le volume passe à 0,25 $m^3$; calculez le travail et la température finale s'il s'agit :

a) d'une évolution isotherme
b) d'une évolution polytropique, $PV^{1.4} = cte$

Rép. : a) $T_2 = 20$ °C ; $W_{1-2} = -34{,}66$ kJ
b) $T_2 = 113{,}45$ °C ; $W_{1-2} = -39{,}94$ kJ

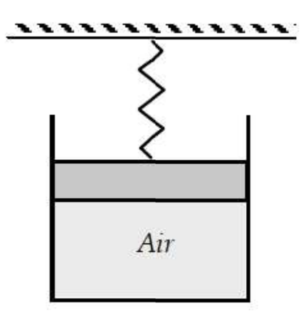
**Problème 4** Un ballon sphérique contient 1 kg d'air à 20 °C et 200 kPa. Le matériau du ballon fait en sorte que la pression est toujours proportionnelle au rayon. On chauffe le ballon jusqu'à ce que la pression interne soit de 300 kPa.

a) Montrez que l'évolution est du type = *cte* et déterminez la valeur de $n$.
b) Quels sont les volumes initial et final ?
c) Calculez le travail effectué au cours de cette évolution.

Rép. :a) $n$ = -1/3
b) $V_1 = 0{,}42 \text{ m}^3$; $V_2 = 1{,}42 \text{ m}^3$
c) $W_{1-2} = 256{,}5$ kJ

**Problème 5** Soit le système représenté ci-dessous; le ressort est du type décrit dans le texte. Le volume initial à l'intérieur du cylindre est de 100 L et la pression y est de 100 kPa. Le ressort touche le piston mais n'y exerce encore aucune force. On chauffe ensuite le système, ce qui entraîne une détente de l'air jusqu'à ce qu'il double de volume ; la pression intérieure est alors de 300 kPa.

a) Décrivez l'évolution au moyen d'un diagramme $P$-$V$.
b) Calculez le travail qu'effectue le système formé par l'air dans le cylindre.

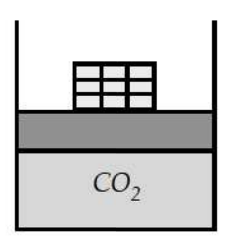



Rép. : b) $W_{1-2} = 20$ kJ

**Problème 6** Un ballon plat est gonflé à partir d'un réservoir d'air comprimé jusqu'à ce que son volume atteigne 5 m³. Le baromètre indique 95 kPa. En choisissant le réservoir, le ballon et le tuyau de raccordement comme système, calculez le travail effectué durant cette évolution.

Rép. : $W_{1-2} = 475$ kJ

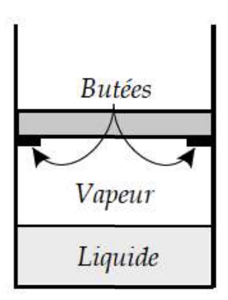
**Problème 7** L'arrangement cylindre-piston illustré ci-dessous contient 0,2 m³ de $CO_2$ (gaz parfait) à 300 kPa et 200 °C. On retire les poids du piston jusqu'à la température finale de 100 °C de manière à ce que le gaz se détende selon la relation : $PV^{1.2} = cte.$
Calculez le travail qui s'effectue durant l'évolution.




Rép. : $W_{1-2} = 63,4$ kJ

**Problème 8** Le cylindre représenté ci-dessous contient 1 kg d'eau saturée (liquide et vapeur) à 30 °C. Le piston a une section de 0.065 m² et une masse de 40 kg ; il repose sur des butées. Au départ, le volume est de 100 L ; la pression atmosphérique ambiante est de 94 kPa et $g = 9.75$ m/s². On fournit de la chaleur au système jusqu'à celui-ci soit de la vapeur saturée.

a) Quelle est la température de l'eau au moment où le piston commence à s'élever au-dessus des butées ?
b) Calculez le travail accompli par l'eau durant l'évolution entière.




Rép. : a) $T_2 = 99{,}6\ °C$ b) $W_{1-2} = 159{,}4\ kJ$

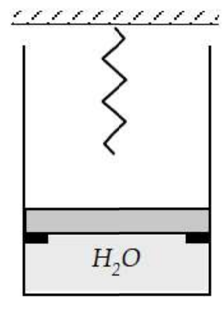
**Problème 9** On comprime de l'ammoniac dans un cylindre fermé par un piston sur lequel agit une force externe. À l'état initial la température est de 30 °C. Voici les données expérimentales concernant cette évolution :

| État | Pression (kPa) | Volume (L) |
|---|---|---|
| 1 | 500 | 1.25 |
| 2 | 653 | 1.08 |
| 3 | 802 | 0.96 |
| 4 | 945 | 0.84 |
| 5 | 1100 | 0.72 |
| 6 | 1248 | 0.60 |
| 7 | 1400 | 0.50 |

a) Déterminez le travail effectué au cours de cette évolution.
b) Quelle est la température finale de l'ammoniac ?

Rép : a) $W_{1-7} = -686{,}11\ J$ b) $T_7 = 78{,}4\ °C$

**Problème 10** Soit l'arrangement piston-cylindre illustré ci-dessous. Le piston de section 0.06 m² repose sur des butées; le volume alors renfermé est de 30 L. La masse du piston est telle qu'il faut une pression de 300 kPa pour le soulever à la pression ambiante. Lorsque le piston est soulevé jusqu'à un point où le volume est de 75 L, il rencontre un ressort qui requiert 360 kN pour être comprimé de 1 m. Au début de l'expérience, le cylindre contient 4 kg d'eau saturée (liquide et vapeur) à 35 °C. Si on chauffe le système jusqu'à ce que la pression interne atteigne 7 MPa, déterminez l'état final de l'eau et ainsi que le travail effectué durant l'évolution.

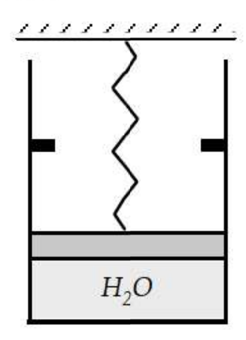



Rép. : $W_{1-3} = 258{,}1\ kJ$ ; $T_3 = 352{,}8\ °C$

**Problème 11** Le cylindre illustré ci-dessous est fermé par un piston qui est retenu par un ressort qui est complétement détendu quand le volume dans le cylindre est nul. Le poids du piston est négligeable. Quand le piston atteint les butées, le volume renfermé dans le cylindre est de 120 L. Au départ, les 4 kg d'eau présentent une pression et un titre de 350 kPa et de 1%, respectivement. L'eau est chauffée jusqu'à ce qu'elle se transforme en vapeur saturée. NB : $P_{atm}$ = 100 kPa.

Représentez cette évolution au moyen d'un diagramme *P-V* et calculez :

a) la pression finale dans le cylindre
b) le travail fait par l'eau durant le procédé




Rép. : a) $P_f = 6,481$ MPa b) $W_{1-3} = 77,6$ kJ

**Problème 12** Calculez le travail effectué et la chaleur échangée au cours de l'évolution décrite au problème numéro 11 du chapitre précédent.

Rép. : $W_{1-3} = 2,55$ kJ , $Q_{1-3} = -47,8$ kJ

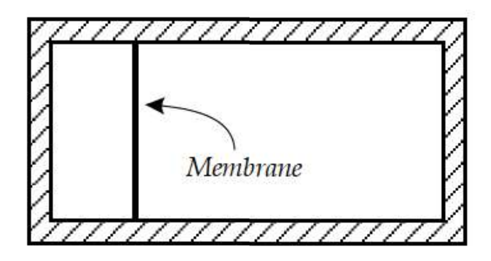
**Problème 13** Calculez le travail effectué et la chaleur échangée au cours de l'évolution décrite au problème numéro 12 du chapitre précédent.

Rép. : $W_{1-3} = 183,6$ kJ; $Q_{1-3} = 549,4$ kJ

**Problème 14** Un réservoir rigide d'une capacité de 500 L est rempli de R134a à 1 MPa et 100 °C. On refroidit le réservoir jusqu'à 0 °C. Calculez la chaleur échangée au cours de cette évolution.

Rép. : $Q_{1-2} = -3377,5$ kJ

**Problème 15** Soit le récipient isolé illustré à la figure qui suit. Il est constitué d'un compartiment sous vide séparé par une membrane d'un second compartiment qui contient 0.5 kg d'eau à 65 °C et 700 kPa. La membrane se rompt et l'eau remplit alors tout le volume du récipient, de sorte que la pression résultante est de 15 kPa. Déterminez la température finale de l'eau et le volume du récipient.




Rép. : $T_2 = 53{,}97$ °C $V_{récipient} = 0{,}1042$ m$^3$

**Problème 16** Un cylindre isolé et fermé par un piston contient du réfrigérant R134a à 20 °C dont le titre est de 90%. Le volume est alors de 30 L. On laisse le piston se déplacer et le R134a se détend jusqu'à ce qu'il se transforme en vapeur saturée. Pendant l'évolution, le système effectue un travail de 4,0 kJ sur le piston. Qu'implique le fait que le piston soit isolé? Déterminez la température finale.

Rép. : $T_2$ = -17,1 °C

**Problème 17** Un cylindre vertical fermé par un piston contient 5 kg de R134a à 12 °C. On fournit de la chaleur au cylindre, ce qui a pour effet de faire monter jusqu'à ce qu'il atteigne des butées ; à ce moment-là, le volume a doublé. On fournit encore de la chaleur jusqu'à ce que la température intérieure atteigne 100 °C ; la pression dans le cylindre est alors 1,2 MPa. Calculez le titre à l'état initial et la chaleur échangée.

Rép. : a) $x_1 = 0{,}229$ b) $Q_{1-3} = 1021{,}3$ kJ

**Problème 18** Une masse de 5 kg de R134a à 8 °C ayant un titre de 30 % est retenue dans un ballon sphérique qui est soumis à une pression interne proportionnelle à son diamètre. On chauffe le système jusqu'à ce que la pression dans le ballon atteigne 500 kPa. Quelle quantité de chaleur est transmise au cours de l'évolution ?

Rép. : $Q_{1-2} = 543{,}7$ kJ

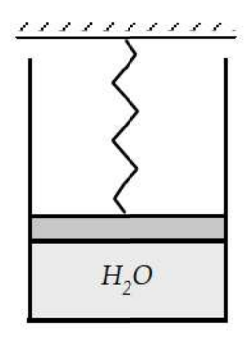
**Problème 19** Un cylindre est fermé par un piston, lequel est retenu par un ressort linéaire (force proportionnelle au déplacement). Le cylindre a un diamètre de 0,25 m, un volume initial de 20 L et contient du R134a à 1 MPa et 60 °C. La constante du ressort est de 150 kN/m. On refroidit le système et le piston se déplace jusqu'à ce que la pression soit de 614, 95 kPa.

a) Trouvez la température finale et le volume final du réfrigérant.
b) Calculez le travail effectué et la quantité de chaleur transmise au cours de l'évolution.

Rép. : a) $T_2 = 22{,}4$ °C ; $V_2 = 13{,}8$ L
b) $Q_{1-2} = -103{,}85$ kJ ; $W_{1-2} = -5{,}0$ kJ

**Problème 20** Un cylindre contient 0,4 kg de vapeur d'eau saturée à 110 °C, comme l'illustre la figure suivante. Le ressort touche alors le piston mais n'y exerce encore aucune force. On fournit de la chaleur à l'eau, ce qui entraîne l'élévation du piston. Pendant l'évolution, la force de rappel du ressort est proportionnelle au déplacement du piston ; la constante du ressort est de 50 kN/m et la section du piston est de 0,05 m$^2$.

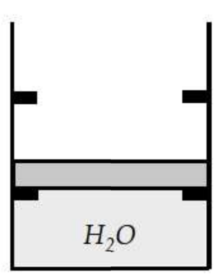
a) Quelle est la température dans le cylindre lorsque la pression intérieure atteint 300 kPa ?
b) Calculez la quantité de chaleur transmise au cours de l'évolution.




Rép. : a) $T_2 = 527{,}3$ °C b) $Q_{1-2} = 265{,}3$ kJ

**Problème 21** Soit l'ensemble piston-cylindre illustré à la figure qui suit où le piston sans frottement est libre de se déplacer entre deux jeux de butées. Le volume délimité par le piston en contact avec les butées inférieures est de 400 L et il vaut 600 L quand le piston atteint les butées supérieures. Initialement, le cylindre est rempli d'eau à 100 kPa à un titre de 20 %. On chauffe le système jusqu'à ce que l'eau devienne de la vapeur saturée. Si la masse du piston est telle qu'une pression de 300 kPa est nécessaire pour le soulever contre la pression ambiante, calculez :

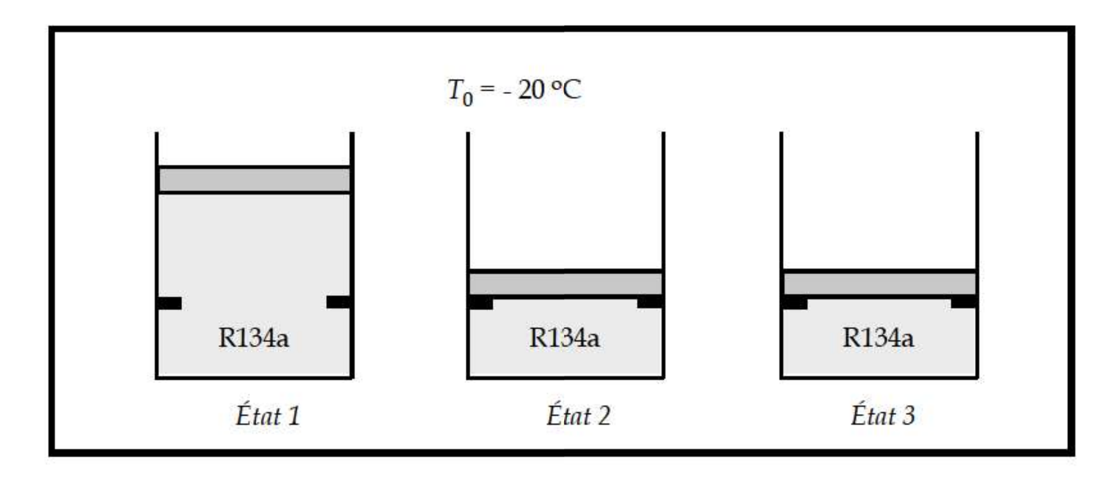
a) la pression finale dans le cylindre.
b) la quantité de chaleur échangée et le travail effectué durant l'évolution entière.




Rép. : a) $P_f = 361$ kPa b) $Q_{1-f} = 2080$ kJ ; $W_{1-f} = 60$ kJ

**Problème 22** Du R134a est contenu dans un cylindre fermé par un piston (voir figure ci-dessous). Le volume est de 1 m³, la pression de 400 kPa et la température de 40 °C (état 1). Le cylindre perd constamment de la chaleur à un réservoir froid dont la température est -20 °C. Le piston descend lentement jusqu'à ce qu'il frôle les butées (état 2). Le volume est alors de 0,5 m³. Le R134a continue à perdre de la chaleur jusqu'à ce que sa température soit de -20 °C. (état 3)

a) Donnez, pour chaque état : *T, P, V* et *x* (si le R134a est un mélange liquide-vapeur).
b) Tracez les évolutions sur un diagramme *P-V*.
c) Calculez $W_{1-3}$ et $Q_{1-3}$.




Rép. : a) $T_1 = 40$ °C ; $P_1 = 400$ kPa ; $V_1 = 1$ m$^3$
$T_2 = 8{,}93$ °C ; $P_2 = 400$ kPa ; $V_2 = 0{,}5$ m$^3$ ; $x_2 = 0{,}5724$
$T_3 = -20$ °C ; $P_3 = 132{,}7$ kPa ; $V_3 = 0{,}5$ m$^3$ ; $x_3 = 0{,}1971$
c) $W_{1-3} = -200$ kJ ; $Q_{1-3} = -3523{,}5$ kJ

**Problème 23** Un gaz parfait est chauffé de 500 à 1000 K. On demande de calculer la variation d'enthalpie massique en supposant que la chaleur massique est constance (voyez la table A.8). Calculez cette valeur si le gaz est :

a) de l'hélium ; b) de l'azote ; c) du dioxyde de carbone.

Rép. : a) $\Delta h = 2596{,}3$ kJ/kg b) $\Delta h = 520{,}8$ kJ/kg c) $\Delta h = 420{,}9$ kJ/kg

**Problème 24** Un cylindre fermé par un piston contient 0,15 kg d'air initialement à 100 kPa et 30 °C. On comprime l'air par un procédé polytropique d'exposant $n$ = 1,25, jusqu'à ce que le volume final corresponde au dixième du volume initial. Calculez le travail effectué et la quantité de chaleur transmise au cours de l'évolution.

Rép. : $W_{1-2} = -40{,}5$ kJ ; $Q_{1-2} = -15{,}4$ kJ

**Problème 25** Un ballon a été conçu pour supporter une pression intérieure $P_0$ = 100 kPa jusqu'à ce que son volume atteigne $V_0$ = 20 m³; au-delà de cette valeur,

$$P = P_0 + C(V - V_0)^2$$

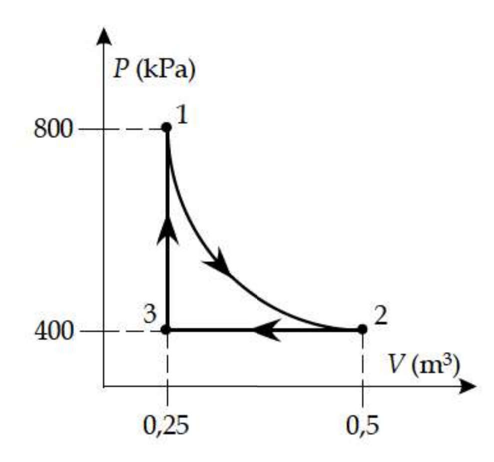
Le ballon contient de l'hélium à 20 °C et 100 kPa dans un volume de 15 m³. On le chauffe jusqu'à ce que l'hélium atteigne 400 °C et la pression est alors de 150 kPa. Calculez le travail effectué par l'hélium ainsi que la quantité de chaleur échangée.

Rép. : $W_{1-3} = 846,4$ kJ ; $Q_{1-2} = 3764,6$ kJ

**Problème 26** Un cylindre fermé par un piston contient de l'argon à 140 kPa et 10 °C dans un volume de 200 L. On comprime alors ce gaz par un procédé polytropique jusqu'à 700 kPa et 180 C. Calculez la quantité de chaleur échangée pendant l'opération.

Rép. : $Q_{1-2} = -15,5$ kJ

**Problème 27** De l'air subit trois évolutions successives formant ainsi un cycle (voir figure ci-dessous). L'évolution 1-2 est isotherme à $T$ = 600 K. Comme on peut le constater sur la figure, les évolutions 2-3 et 3-1 sont isobare et isochore, respectivement. Calculez le travail et la chaleur échangée pour chaque évolution.

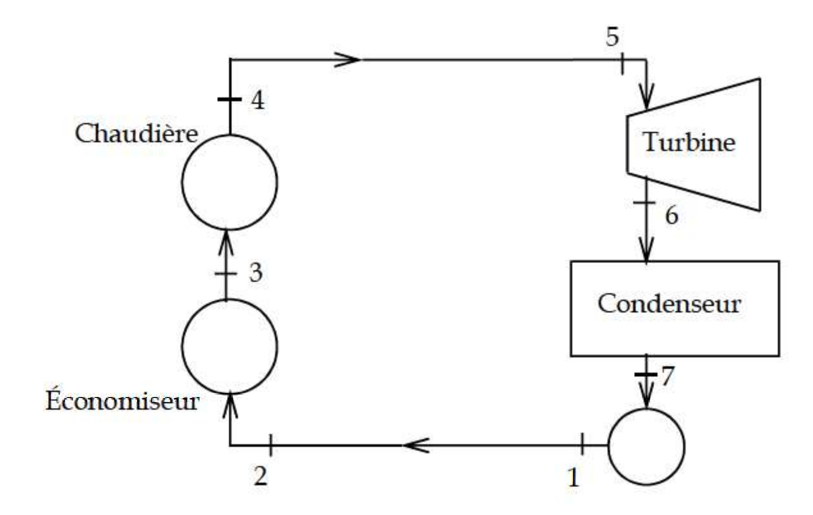



Rép. : $W_{1-2}$ = 138,6 kJ $W_{2-3}$ = -100 kJ $W_{3-1}$ = 0
$Q_{1-2}$ = 138,6 kJ $Q_{2-3}$ = -349,4 kJ $Q_{3-1}$ = 249,6 kJ

**Problème 28** Les données suivantes correspondent aux conditions qui prévalent dans une centrale thermique élémentaire comme celle qui est illustrée à la figure ci-dessous :

$P_1$ = 6,2 MPa
$P_2$ = 6,0 MPa , $T_2$ = 40 °C
$P_3$ = 6,0 MPa , $T_3$ = 160 °C
$P_4$ = 5,5 MPa , $T_4$ = 500 °C
$P_5$ = 5,0 MPa , $T_5$ = 490 °C
$P_6$ = 10 kPa , $x_6$ = 0,92
$P_7$ = 9 kPa , $T_7$ = 40 °C

$\dot{m} = 25$ kg/s




Négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle, calculez :

a) la puissance de sortie de la turbine (adiabatique) ;
b) le taux de transmission de chaleur dans le condenseur, dans l'économiseur et dans le générateur de vapeur.
c) le débit d'eau de refroidissement dans le condenseur, si la température de l'eau de refroidissement y passe de 15 °C à 25 °C.

Rép. : a) $\dot{W} = 25430$ kW
b) *i)* $\dot{Q}_{cond} = -55640$ kW
*ii)* $\dot{Q}_{econ} = 12650$ kW
*iii)* $\dot{Q}_{ch} = 68730$ kW
c) $\dot{m} = 1328$ kg/s

# CHAPITRE 3

# LE SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

## Table des matières

**3.1 Introduction** **3**

**3.2 Réservoirs thermiques** **3**

**3.3 Machines thermiques et réfrigérateurs** **3**
3.3.1 Machines thermiques 3
*3.3.1.1 Rendement thermique* *5*
3.3.2 Réfrigérateurs et pompes thermiques 6
*3.3.2.1 Coefficient de performance* *7*

**3.4 Le second principe de la thermodynamique** **8**
3.4.1 L'énoncé de Kelvin-Planck 8
3.4.2 Énoncé de Clausius 8

**3.5 Évolutions réversibles et irréversibles** **8**
3.5.1 Irréversibilité et travail perdu 9

**3.6 Cycle de Carnot** **11**
3.6.1 D'autres résultats concernant les cycles de Carnot 12

**3.7 L'inégalité de Clausius** **13**

**3.8 Entropie** **14**
3.8.1 Entropie massique 15
3.8.2 Diagramme *T-s* 15

**3.9 Représentation du cycle de Carnot sur un diagramme *T-s*** **18**

**3.10 Le principe d'accroissement de l'entropie** **19**

**3.11 Relations *Tds*** **22**

**3.12 Variation d'entropie d'un gaz parfait.** **22**

**3.13 Variation d'enthalpie lors d'une évolution adiabatique réversible.** **26**

**3.14 EXERCICES** **29**

## 3.1 Introduction

Si une tasse de café à la température de 50 °C est placée dans une pièce à 20 °C, elle verra sa température s'abaisser, l'énergie qu'elle perd étant transférée à l'air de la pièce sous forme de chaleur. Cette évolution, remarquons-le, satisfait le premier principe de la thermodynamique. Toutefois, l'évolution inverse consistant en un transfert de chaleur de l'air vers le café dans les conditions spécifiées ne sera pas observée même si elle aussi, est permise par le premier principe. Le premier principe, on le constate, ne suffit donc pas à prédire comment les choses vont évoluer. Plus précisément, il ne permet pas de prédire le *sens* avec lequel s'effectuera la transformation d'un système. Une nouvelle loi, le second principe de la thermodynamique est donc rendue nécessaire pour rendre compte de ce qui est effectivement observé. Le second principe permets de comprendre pourquoi la plupart des évolutions que l'on rencontre sont à sens unique : la chaleur passe du corps chaud au corps froid, le verre se brise mais ne se reconstitue spontanément, deux gaz se mélangent mais leur séparation nécessite l'action d'un agent extérieur, etc.

## 3.2 Réservoirs thermiques

Il arrive souvent que le système soit mis en contact thermique avec un corps dont les dimensions et la masse sont telles que les échanges de chaleur entre le système et celui-ci n'affectent pour ainsi dire pas la température du corps en question. On dira de ce corps qu'il agit comme *réservoir thermique* vis-à-vis du système. Un réservoir thermique idéal sera alors caractérisé par le fait qu'il peut échanger n'importe qu'elle quantité de chaleur toute en maintenant sa température soit constante. À titre d'exemple, l'air de la pièce qui refroidit le café peut être considéré comme agissant comme réservoir thermique puisque sa température restera sensiblement la même durant le processus.

## 3.3 Machines thermiques et réfrigérateurs

Historiquement parlant, le second principe a d'abord été introduit dans le cadre de la description du fonctionnement des machines thermiques et des réfrigérateurs. Comme cette approche est aussi la plus simple du point de vue conceptuel, c'est celle que nous adopterons.

### 3.3.1 Machines thermiques

On définit la *machine thermique* ainsi : il s'agit d'une machine fonctionnant selon un cycle qui reçoit de la chaleur d'un réservoir thermique à haute température et qui rejette de la chaleur vers un réservoir thermique à basse température et ce faisant produit un travail net positif. Le schéma de la machine thermique est illustré à la figure 3.1

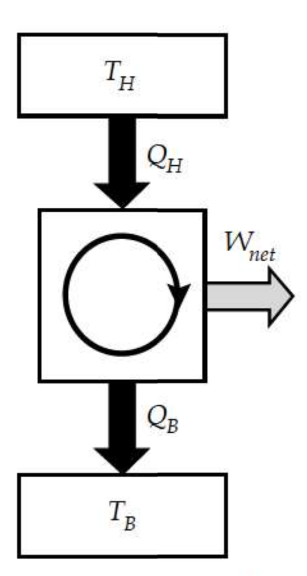



**Figure 3.1** Schéma de la machine thermique

$T_H$ et $T_B$ représentent les températures des réservoirs thermiques à haute et basse température respectivement. Les chaleurs que ceux-ci échangent avec la machine seront désignées par $Q_H$ et $Q_B$ respectivement. Pour simplifier l'écriture de certaines équations (ainsi que leur l'interprétation), il est d'usage que ces symboles représentent les valeurs absolues des chaleurs échangées. Ainsi, la chaleur reçue par la machine du réservoir à $T_H$ étant positive, alors :

$$Q_{reçue} = Q_H$$

En contrepartie, la chaleur perdue par la machine vers le réservoir à $T_B$ est négative, alors :

$$Q_{perdue} = -Q_B$$

La machine thermique type comporte quatre éléments (figure 3.2)

1) un évaporateur (ou réchauffeur)
2) une turbine
3) un condenseur (ou refroidisseur)
4) une pompe (ou compresseur)

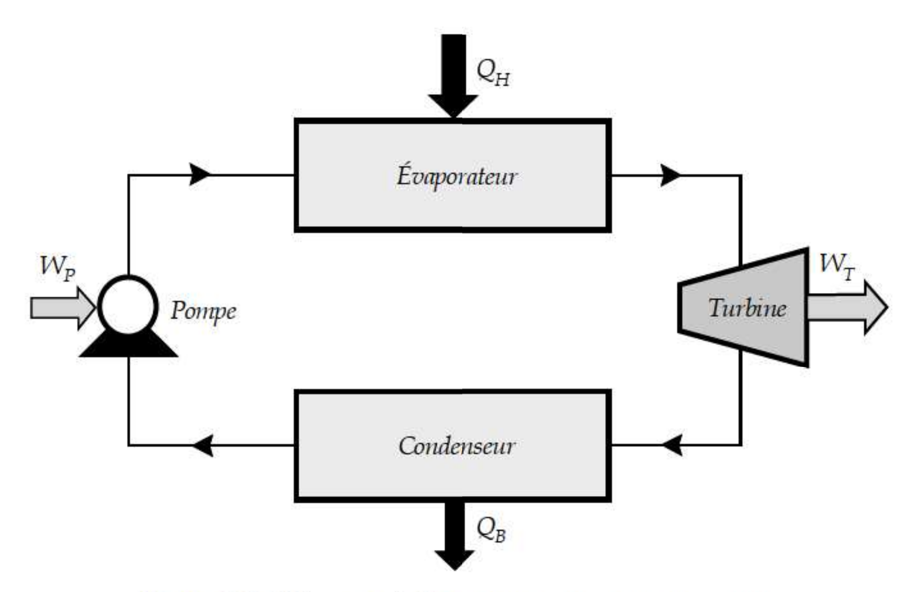



**Figure 3.2** Éléments de base d'une machine thermique

Le travail net du cycle sera alors :

$$W_{net} = W_T + W_P \tag{3-1}$$

et la chaleur nette échangée :

$$Q_{net} = Q_H - Q_B \tag{3-2}$$

En vertu du premier principe :

$$Q_{net} = W_{net}$$
$$W_{net} = Q_H - Q_B$$

#### 3.3.1.1 *Rendement thermique*

Le rendement thermique, $\eta$, est défini comme le rapport de l'énergie recherchée $(W_{net})$ sur l'énergie à fournir $Q_H$.

$$\eta = \frac{W_{net}}{Q_H} \tag{3-3}$$

Alors :

$$\eta = \frac{Q_H - Q_B}{Q_H} = 1 - \frac{Q_B}{Q_H} \tag{3-4}$$

A priori, le rendement thermique sera compris entre 0 et 1. Toutefois, on verra à la suite que le second principe impose une limite supérieure théorique à la valeur que peut prendre $\eta$.

**Exemple 3.1** : Une machine thermique reçoit un taux de chaleur $\dot{Q}_H$ de 100 kW et rejette un taux de chaleur $\dot{Q}_B$ de 80 kW Calculez le rendement thermique de ce cycle.

*Solution*

$$\dot{W}_{net} = \dot{Q}_H - \dot{Q}_B = 20 \text{ kW}$$
$$\eta = \frac{\dot{W}_{net}}{\dot{Q}_H} = 20\%$$

### 3.3.2 Réfrigérateurs et pompes thermiques

On définit le *réfrigérateur* (ou la *pompe thermique*) ainsi : il s'agit d'une machine fonctionnant selon un cycle qui reçoit de la chaleur d'un réservoir à basse température et rejette de la chaleur vers un réservoir à haute température et qui, pour ce faire, nécessite l'apport de travail (travail net négatif).

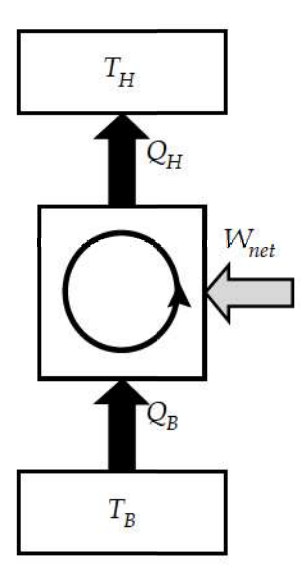



**Figure 3.3** Schéma du réfrigérateur ou de la pompe thermique

Le réfrigérateur de base comporte quatre éléments (figure 3.4) :

1) un compresseur
2) un condenseur
3) une soupape d'étranglement
4) un évaporateur

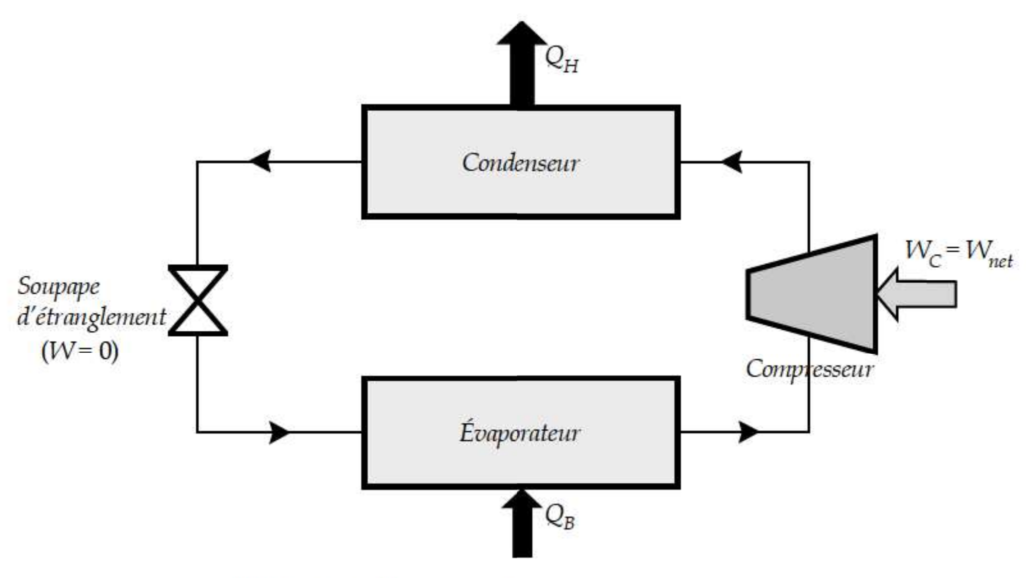



**Figure 3.4** Éléments de base d'un réfrigérateur

#### 3.3.2.1 *Coefficient de performance*

Alors que l'efficacité d'un cycle de machine thermique se mesure à l'aide du rendement thermique $\eta$, on l'a quantifie en employant le coefficient de performance $\beta$ pour les cycles de réfrigération. Le cycle de réfrigération est utilisé à deux fins :

a) retirer de la chaleur d'un corps à basse température (réfrigérateur) ;
b) fournir de la chaleur à un corps à haute température (pompe thermique).

Si l'appareil est employé comme réfrigérateur, $\beta$ est défini par :

$$\beta = \frac{Q_B}{|W_{net}|} \tag{3-5}$$

Puisque :

$$W_{net} = Q_B - Q_H < 0$$

il vient :

$$|W_{net}| = Q_H - Q_B$$

et :

$$\beta = \frac{1}{\frac{Q_H}{Q_B} - 1} \tag{3-6}$$

Quand l'appareil travaille comme pompe thermique, on utilise plutôt le coefficient de performance $\beta'$ défini par :

$$\beta' = \frac{Q_H}{|W_{net}|} = \frac{1}{1 - \frac{Q_B}{Q_H}} \tag{3-7}$$

## 3.4 Le second principe de la thermodynamique

Il existe deux énoncés du second principe de la thermodynamique concernant les caractéristiques présentées par un cycle de machine thermique, d'une part, et d'un cycle de réfrigération, d'autre part.

### 3.4.1 L'énoncé de Kelvin-Planck

L'énoncé de Kelvin-Planck se lit comme suit : il est impossible de réaliser un appareil décrivant un cycle et qui n'aurait d'autre effet que de produire du travail en échangeant de la chaleur qu'avec un seul réservoir.

Cet énoncé concerne traite des machines thermiques. Il indique que l'échange de chaleur doit se faire avec deux réservoirs au moins. Puisque l'échange de chaleur avec le réservoir à haute température est obligatoire afin que le premier principe soit satisfait, l'énoncé de Kelvin-Planck doit s'interpréter comme le constat que de la chaleur doit être rejetée vers le réservoir à basse température ($Q_B \neq 0$). Une autre façon de l'interpréter est que toute la chaleur absorbée par la machine ($Q_H$) ne peut être convertie en travail. En conséquence, aucune machine thermique ne peut présenter de rendement thermique de 100%.

### 3.4.2 Énoncé de Clausius

L'énoncé de Clausius se lit comme suit : il est impossible de réaliser un appareil décrivant un cycle qui ne produirait d'autre effet que celui de transmettre de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud.

Cet énoncé traite des cycles de réfrigération. Il stipule qu'on ne peut construire de réfrigérateur qui fonctionnerait sans travail ou, ce qui est équivalent, on ne peut faire transiter de la chaleur d'un corps froid vers un corps chaud sans apport d'énergie sous forme de travail. En conséquence, le coefficient de performance ne peut être infini.

## 3.5 Évolutions réversibles et irréversibles

On dit d'une évolution qu'elle est *réversible* si, après qu'elle a été décrite, elle peut être inversée de manière à ne laisser subsister aucune modification du système ou du milieu ambiant. Exprimé autrement, une évolution réversible est une évolution qui peut être stoppée en tout moment et être décrite en sens inverse sans pour cela nécessiter que l'on apporte des modifications au système ou à l'environnement.

L'évolution ne sera pas réversible (*irréversible*, donc) si un ou plusieurs des facteurs suivants caractérise l'évolution :

1) l'évolution n'est pas quasi statique

2) il existe des effets dissipatifs tels que frottement entre des surfaces solides, frottement visqueux, hystérésis, etc.

3) il y a transfert de chaleur en présence d'une différence finie de température entre le système et l'environnement.

*Exemples d'évolutions irréversibles.*

*i)* Soit un piston pouvant se déplacer dans un cylindre qui exerce une force de frottement $F_F$ sur le piston. Si le système subit une expansion isobare à la pression $P$, la pression de l'environnement doit être inférieure à $P$ et valoir $P - F_F/A$ . Si, après avoir stoppé l'évolution, on veut l'inverser et comprimer le système dans les mêmes conditions, la pression de l'environnement devra être haussée à $P + F_F/A$ (figure 3.5).

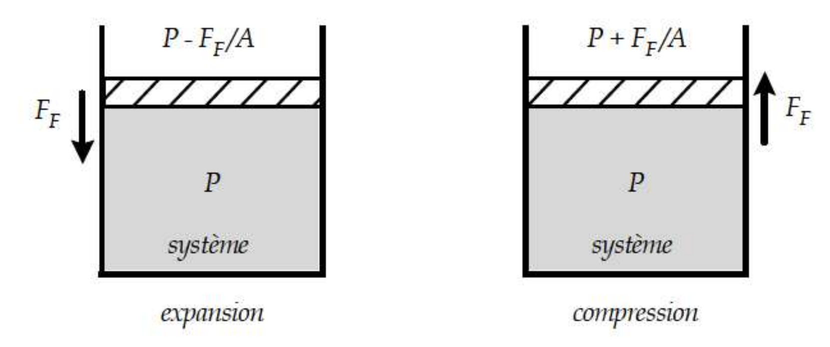



**Figure 3.5** Le frottement introduit de l'irréversibilité

Notons que dans ce cas, le système subit une évolution quasi statique; il n'est pas responsable de l'irréversibilité.

*ii)* Un contenant comprend deux régions séparées par une membrane. La première région est occupée par un gaz alors que l'autre est évacuée. Si la membrane est rompue, le gaz remplit tout le volume. Ce processus est irréversible car l'évolution ne peut être inversée sans que l'environnement soit modifié

Comme toute évolution réelle présente au moins un des facteurs d'irréversibilité mentionnés plus haut, on comprendra que l'évolution réversible est une idéalisation qui ne se produit jamais dans la réalité.

### 3.5.1 Irréversibilité et travail perdu

Si l'évolution réversible n'est pas réalisable, à quoi sert l'introduction d'un tel concept ? Nous répondrons à cette question à l'aide de deux exemples.

Revenons sur le cas de la détente libre du gaz dont nous avons fait état plus haut. Cette évolution est irréversible car non contrôlée (non quasi statique). Admettons que le contenant avec le gaz soit en contact thermique avec un réservoir thermique à la température $T_0$. Si le volume du contenant est $V_C$ et que le gaz (parfait) en occupe initialement la moitié, alors les conditions initiales et finales du système seront :

$$\textit{État } 1 \begin{cases} T_1 = T_0 \\ V_1 = V_C/2 \end{cases} \qquad \textit{État } 2 \begin{cases} T_2 = T_0 \\ V_2 = V_C \end{cases}$$

Remarquons qu'aucun travail n'est effectué lors de l'évolution (détente libre).

Toutefois, le système passerait par les mêmes états initial et final s'il connaissait une évolution isotherme à la température $T_0$. Dans le cas d'une évolution isotherme (réversible), le travail vaudrait :

$$W_{1-2} = m\,R\,T_0 \ln(2)$$

On peut interpréter ces constats de la façon suivante. La transformation du système de son état initial à son état final présente un « potentiel de travail » qui sera réalisé à des degrés divers selon le type d'évolution employée. Manifestement, la détente libre constitue un gaspillage total de ce « potentiel » puisqu'aucun travail n'est effectué.

Voyons un autre exemple. Considérons le chauffage isobare d'un mélange liquide-vapeur entre les volumes $V_1$ et $V_2$. Puisque $P = P_S$ le travail sera :

$$W_{1-2} = P_s\left(V_2 - V_1\right) = P_s \Delta V$$

Admettons que la chaleur provienne d'un réservoir thermique à la température $T_0$. Si la température du système est $T < T_0$, le transfert de chaleur se fera de façon irréversible et le travail sera :

$$W_{1-2(T)} = P_S\left(T\right)\Delta V$$

En contrepartie, si le système est porté à la température du réservoir thermique avant que ne débute l'expansion, le transfert de chaleur sera réversible et on trouvera :

$$W_{1-2(T_0)} = P_S\left(T_0\right)\Delta V$$

Puisque $T_0 > T$, alors $P_s\left(T_0\right) > P_s\left(T\right)$ et $W_{1-2(T_0)} > W_{1-2(T)}$. Ce résultat est illustré à la figure 3.6.

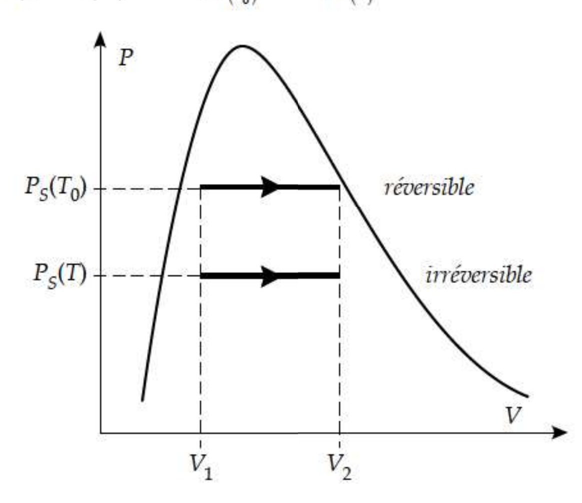



**Figure 3.6** Travaux produits lors d'évolutions réversible et irréversible

De façon générale, l'utilisation la plus efficace de ce « potentiel de travail » se fera par le biais d'évolutions réversibles et on peut toujours associer un certain gaspillage de ce potentiel à la présence d'irréversibilités durant l'évolution. L'évolution réversible constitue alors une situation idéale vers laquelle on doit chercher à tendre si on veut optimiser l'interaction entre le système et son environnement.

## 3.6 Cycle de Carnot

Le second principe de la thermodynamique stipule que le rendement d'une machine thermique ne peut jamais atteindre 100% quelle que soit sa conception. On est donc en droit de se demander s'il est possible de prédire le rendement maximal auquel on peut s'attendre pour une machine fonctionnant entre deux réservoirs thermiques déterminés. En vertu de ce que nous avons vu plus haut, on comprendra que le cycle le plus efficace sera nécessairement constitué d'évolutions réversibles.

Reconsidérons le schéma de la machine thermique représenté à la figure 3.1. Le système n'échange de la chaleur qu'avec les réservoirs thermiques de températures de $T_H$ et $T_B$. Or, tout échange de chaleur, pour qu'il soit réversible, doit s'effectuer sans écart de température entre le système et son environnement. Ainsi, le cycle devra comporter deux évolutions isothermes réversibles aux températures de $T_H$ et $T_B$, respectivement. Le système doit toutefois passer de $T_H$ à $T_B$ et puis de $T_B$ à $T_H$ pour compléter le cycle. Comme les échanges de chaleur doivent s'effectuer de façon isotherme pour être réversibles, il s'ensuit que les évolutions de diminution et d'augmentation de température doivent être adiabatiques réversibles. On peut montrer que lors d'évolutions adiabatiques, le volume du système doit varier de sorte que le cycle sera constitué des évolutions suivantes :

1) évolution isotherme réversible à $T = T_H$ au cours de laquelle le système échange de la chaleur avec le réservoir chaud.
2) évolution d'expansion adiabatique réversible.
3) évolution isotherme réversible à $T = T_B$ au cours de laquelle le système échange de la chaleur avec le réservoir froid.
4) évolution de compression adiabatique réversible.

Un cycle constitué de ces quatre évolutions est dénommé *cycle de Carnot*. Remarquons que c'est le seul cycle totalement réversible qui puisse échanger de la chaleur avec deux réservoirs seulement. Aucun autre cycle n'échangeant de la chaleur qu'avec deux réservoirs ne peut être aussi efficace. En conséquence, le cycle de Carnot peut servir de référence à laquelle les autres cycles seront comparés.

Remarquons finalement que puisque toute évolution réversible peut par définition s'inverser, il en va de même du cycle dans son ensemble. Parcouru dans un sens le cycle de Carnot correspond à un cycle de machine thermique (chaleur absorbée à $T_H$ et rejetée à $T_B$). Parcouru dans le sens inverse, on obtient un cycle de Carnot de réfrigération (chaleur absorbée à $T_B$ et rejetée à $T_H$).

### 3.6.1 D'autres résultats concernant les cycles de Carnot

Nous avons établi que le cycle de Carnot est le cycle le plus performant étant donné deux réservoirs thermiques de température $T_H$ et $T_B$.

Nous allons admettre sans démonstration un autre résultat : tous les cycles de Carnot opérant entre les mêmes réservoirs thermiques présentent le même rendement. Ce résultat implique que le rendement thermique d'un cycle de Carnot ne dépend que des températures $T_H$ et $T_B$. Ainsi,

$$\eta_{Car} = 1 - \frac{Q_B}{Q_H} = f\left(T_B, T_H\right)$$

où $\eta_{Car}$ : rendement du cycle de Carnot

Il existe en conséquence une relation entre $Q_H, Q_B$, $T_H$ et $T_B$. Lord Kelvin proposa la relation suivante qui définit l'échelle de température absolue :

$$\frac{Q_H}{Q_B} = \frac{T_H}{T_B} \qquad (3\text{-}8)$$

Pour des machines opérant selon des cycles de Carnot, les relations (3-4), (3-6) et (3-7) donnant respectivement le rendement d'une machine thermique et les coefficients de performance d'un réfrigérateur et d'une pompe thermique, deviennent :

$$\eta_{Car} = 1 - \frac{Q_B}{Q_H} = 1 - \frac{T_B}{T_H} \qquad (3\text{-}9)$$

$$\beta_{Car} = \frac{1}{\dfrac{Q_H}{Q_B} - 1} = \frac{1}{\dfrac{T_H}{T_B} - 1} \qquad (3\text{-}10)$$

$$\beta'_{Car} = \frac{1}{1 - \dfrac{Q_B}{Q_H}} = \frac{1}{1 - \dfrac{T_B}{T_H}} \qquad (3\text{-}11)$$

**Exemple 3.2 :** On propose d'utiliser une source géothermique à 150 °C pour alimenter la chaudière d'une machine thermique. Le système absorbe un taux de transmission de chaleur de 50 kW. Le réservoir froid est à 20 °C. Quelle est la puissance nette maximale que l'on peut produire à partir de ce cycle ?

*Solution*

Le travail maximal sera celui produit par une machine de Carnot. On a donc :

$$\eta_{car} = 1 - \frac{T_B}{T_H} = 1 - \frac{293}{423} = 0{,}3073$$

$$\dot{W}_{net} = \eta_{Car}\dot{Q}_H = 0{,}3073 * 50 = 15{,}4 \text{ kW}$$

Puisque le cycle de Carnot est le plus performant, il s'ensuit que l'énergie absorbée par une machine thermique ($Q_H$) ne sera pas utilisée aussi efficacement dans le cas d'un autre type de cycle. Considérons deux machines dont une machine de Carnot absorbant toutes deux la même chaleur $Q_H$, on aura :

$$\eta_{Car} > \eta_{irr}$$

$$\frac{W_{rev}}{Q_H} > \frac{W_{irr}}{Q_H}$$

$$\Rightarrow \; W_{rev} > W_{irr}$$

ou encore :

$$Q_H - Q_{B\,rev} > Q_H - Q_{B\,irr} \;\Rightarrow\; Q_{B\,irr} > Q_{B\,rev}$$

Ainsi, une part plus importante de l'énergie absorbée sera rejetée vers l'environnement par une machine irréversible.

### 3.7 L'inégalité de Clausius

Le second principe de la thermodynamique mène à une inégalité très importante, l'inégalité de Clausius :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \qquad (3\text{-}12)$$

L'égalité à la relation (3-12) s'applique aux cycles réversibles alors que l'inégalité concerne les cycles irréversibles.

Le calcul prévu par la relation (3-12) n'est pas aisé en général. Il y a toutefois une situation où il est particulièrement simple; nous pourrons ainsi vérifier le résultat (3-12) dans ce cas. Considérons une machine thermique effectuant ses transferts de chaleur de façon isotherme à $T_H$ et $T_B$ respectivement, l'intégrale de contour fermé devient

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_B}{T_B}$$

Pour un cycle de Carnot (cycle réversible), l'équation (3-8) donne :

$$\frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_{B\,rév}}{T_B} = 0$$

et ainsi, une partie du résultat est vérifié:

$$\left(\oint \frac{\delta Q}{T}\right)\Big|_{rév} = 0$$

D'autre part, si on présume que la machine irréversible absorbe la même chaleur $Q_H$ que la machine de Carnot, il vient (voyez la section 3.6.1) :

$$Q_{B\,irr} > Q_{B\,rév}$$

Et en conséquence : $\dfrac{Q_H}{T_H} - \dfrac{Q_{B\,irr}}{T_B} < 0$

Alors : $\left(\oint \dfrac{\delta Q}{T}\right)\Big|_{irr} < 0$

## 3.8 Entropie

Considérons les deux cycles réversibles illustrés à la figure 3.7

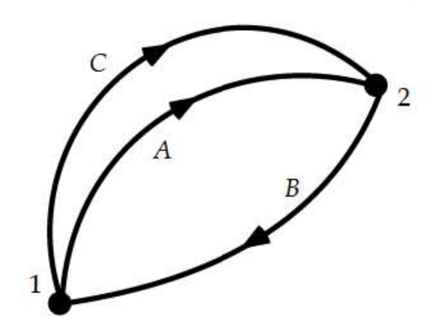



**Figure 3.7** Deux cycles réversibles

Les évolutions sont *A*, *B*, *C* toutes trois réversibles. En conséquence les cycles formés des évolutions *A-B* (cycle *I*) et *A-C* (cycle *II*), le sont aussi. L'inégalité de Clausius pour chaque cycle devient :

$$\left(\oint \frac{\delta Q}{T}\right)_I = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_B = 0$$

$$\left(\oint \frac{\delta Q}{T}\right)_{II} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_C + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_B = 0$$

Puisque : $\left(\oint \dfrac{\delta Q}{T}\right)_I = \left(\oint \dfrac{\delta Q}{T}\right)_{II}$

il vient : $\int_1^2 \left(\dfrac{\delta Q}{T}\right)_A = \int_1^2 \left(\dfrac{\delta Q}{T}\right)_C$

Comme aucune condition n'a été imposée sur le choix des évolutions *A* et *C* (sauf qu'elles sont réversibles), on conclut que le résultat ne dépend pas du chemin emprunté (*A* ou *C*) mais seulement des points de départ et d'arrivée (1 et 2). Ceci implique que l'on peut définir une fonction *S* qui prend des valeurs spécifiques en 1 et 2 de sorte que :

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rév} \tag{3-13}$$

Comme la valeur que prend cette fonction ne dépend que de l'état (du point) considéré, il s'agit d'une propriété thermodynamique ou variable d'état. Clausius inventa le nom d'*entropie* pour

désigner cette grandeur. L'équation (3-13) définit la variation d'entropie. Notons que pour employer cette relation l'intégrale doit s'effectuer selon un chemin **réversible** liant les deux états. Le choix du chemin n'est pas important dans la mesure que celui-ci est réversible

Si l'évolution que connaît le système est irréversible il est toujours possible de calculer la variation d'entropie puisque l'entropie est une variable d'état. Considérant les états initial et final du système, on conçoit une évolution réversible qui relie ces états et on utilise l'équation (3-13) pour cette évolution. Si on considère une évolution réversible infinitésimale (3-13) devient :

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rév} \tag{3-14}$$

### 3.8.1 Entropie massique

Comme le calcul de la variation d'entropie fait intervenir le rapport d'une quantité extensive (la chaleur) et d'une grandeur intensive (la température), il s'ensuit que l'entropie est elle-même une variable thermodynamique extensive.

On définit donc l'entropie massique, $s$ :

$$s = \frac{S}{m} \left(\frac{\text{J}}{\text{kg*K}}\right) \tag{3-15}$$

Alors, dans le cas d'un mélange liquide-vapeur :

$$s = s_f + x s_{fg} \tag{3-16}$$

et :

$$x = \frac{s - s_f}{s_{fg}}$$

### 3.8.2 Diagramme *T-s*

Puisque l'entropie est une variable thermodynamique, elle peut servir à spécifier l'état d'un système. Si, en particulier, elle est couplée à la variable de température, on peut représenter l'état d'un système sur un diagramme *T-s* (ou *T-S*) dont l'importance en thermodynamique est comparable à celle du diagramme *P-v*.

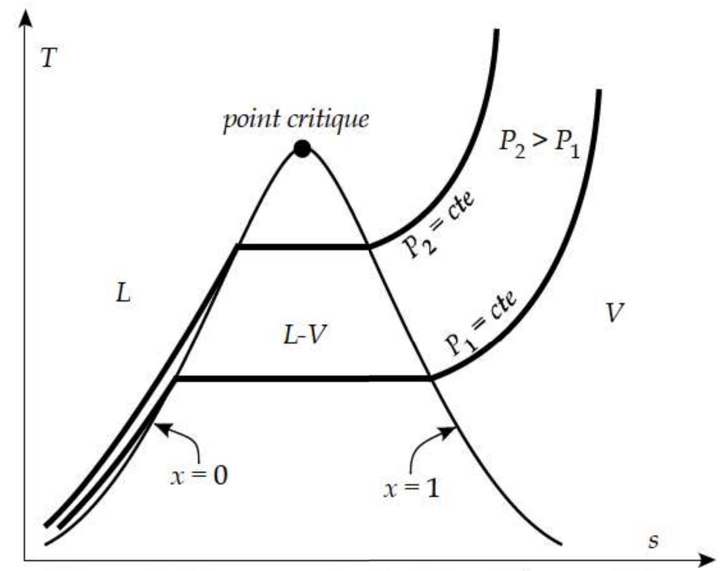



**Figure 3.8** Diagramme *T-s* pour une substance pure.

La figure 3.8 représente un diagramme *T-s* sur lequel apparaissent les régions de liquide comprimé *(L)*, de mélange liquide-vapeur (*L-V*), et de vapeur surchauffée (*V*). On a aussi représenté deux évolutions isobares. On remarque que l'allure générale de ces évolutions dans ce type de diagramme s'apparente à celle qu'elles présentent dans un diagramme *T-v*.

L'équation (3-14) peut s'écrire :

$$\delta Q = T\, dS \tag{3-17}$$

de sorte qu'on trouve :

$$\boxed{Q_{1-2} = \int_1^2 T\, dS} \tag{3-18}$$

Ainsi, la chaleur échangée lors d'une évolution réversible peut être considérée comme la surface sous la courbe représentant cette évolution dans un diagramme *T-S* (figure 3.9).

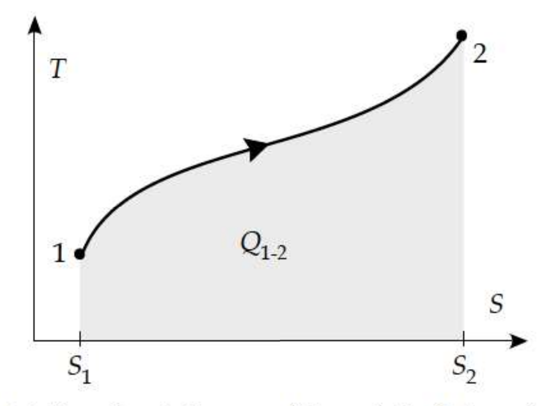



**Figure 3.9** Représentation graphique de la chaleur échangée.

Puisque la température est toujours positive, le signe de $\delta Q$ à l'équation (3-17) est spécifié par le signe de $dS$. Ainsi, à une évolution progressant vers la droite sur le diagramme $T$-$S$ sera associée une chaleur positive et, à une évolution vers la gauche, une chaleur négative.
Établissons maintenant un résultat important. Une évolution adiabatique est une évolution sans échange de chaleur. Si de plus, l'évolution est réversible, on peut écrire :

$$\delta Q = T\,dS = 0$$

c'est-à-dire :

$$S = cte \tag{3-19}$$

Ainsi, l'évolution **adiabatique réversible** est caractérisée par le fait que l'entropie se maintient constante. On dira d'elle qu'elle est *isentropique*.

**Exemple 3.3 :** Un cylindre contient de la vapeur saturée de R134a à -10 °C. La vapeur est comprimée par un piston lors d'une évolution adiabatique réversible jusqu'à la pression de 1,6 MPa. Calculez le travail massique effectué.

*Solution*

Sur le diagramme $T$-$s$, l'évolution prends l'allure suivante :

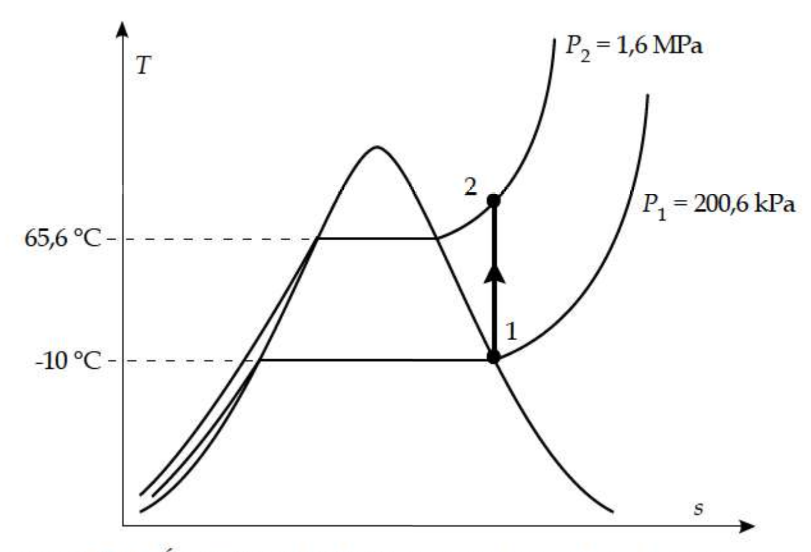



**Figure 3.10** Évolution adiabatique réversible sur un diagramme $T$-$s$

$$q_{1-2} = u_2 - u_1 + w_{1-2} = 0$$
$$\Rightarrow \; w_{1-2} = u_1 - u_2$$

*État* 1 $\begin{cases} T_1 = -10 \text{ °C} \\ x_1 = 1 \end{cases}$

$P_1 = P_s(-10 \text{ °C}) = 200{,}6$ kPa

$u_1 = u_g(-10 \text{ °C}) = 372{,}69$ kJ/kg

$s_1 = s_g(-10 \text{ °C}) = 1{,}7334$ kJ/kg•K

*État* 2 $\begin{cases} P_2 = 1{,}6 \text{ MPa} \\ s_2 = s_1 = 1{,}7334 \text{ kJ/kg•K} \end{cases}$

vapeur surchauffée $T_2$ = 65,6 °C

$u_2 = 415{,}25$ kJ/kg

$$w_{1-2} = u_1 - u_2 = -42{,}56 \text{ kJ/kg}$$

### 3.9 Représentation du cycle de Carnot sur un diagramme *T-s*

Rappelons les évolutions d'un cycle de Carnot s'appliquant à une machine thermique.

a) 1-2 : compression adiabatique réversible
b) 2-3 : absorption de chaleur isotherme réversible à $T = T_H$
c) 3-4 : expansion adiabatique réversible
d) 4-1 : rejet de chaleur isotherme réversible à $T = T_B$

Rappelons qu'une évolution isotherme apparaîtra comme une droite horizontale dans un diagramme *T-S* et que l'évolution isentropique, comme une droite verticale. Comme la chaleur est absorbée durant l'évolution 2-3, le point 3 devra se situer à la droite du point 2 sur le diagramme $(Q_{2-3} > 0)$. De façon similaire, on établit que le point 1 se situe à la gauche du point 4 sur le diagramme $(Q_{4-1} < 0)$. Comme les évolutions adiabatiques réversibles sont isentropiques, le cycle de Carnot d'une machine thermique prend l'allure illustrée à la figure 3.11a.

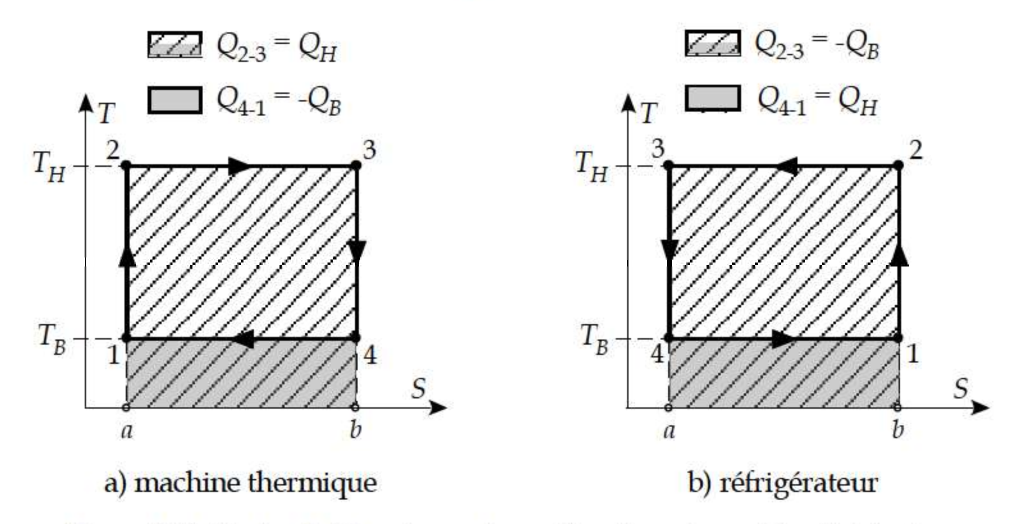



**Figure 3.11** Cycles de Carnot pour la machine thermique et le réfrigérateur

La surface a-2-3-b (surface hachurée) de la figure 3.11 a) représente la chaleur absorbée $Q_{2-3}$ provenant du réservoir chaud $(Q_H = Q_{2-3})$. La surface a-1-4-b (surface en gris) représente la chaleur rejetée $Q_{4-1}$ vers le réservoir froid $(Q_B = |Q_{4-1}|)$. La surface délimitée par les courbes d'évolutions représente alors la chaleur nette échangée (surface hachurée sur fond blanc) $(Q_{net} > 0)$. Rappelons qu'en vertu du premier principe on a $Q_{net} = W_{net}$.
Si le cycle de la figure 3.11 a) est parcouru en sens inverse, on obtient le cycle de la figure 3.11 b). La numérotation des points a été changée mais le cycle a la même forme. Toutefois, puisque la chaleur est absorbée à $T = T_B$ (surface a-3-2-b) et rejetée à $T = T_H$ (surface a-4-1-b), il s'agit d'un cycle de réfrigération comme en font foi les signes des chaleur et travail nets $(Q_{net} = W_{net} < 0)$.

Notons que la forme du cycle de Carnot est indépendante de la nature du système. La substance effectuant le cycle peut être un gaz parfait ou une substance qui se vaporise et se condense comme de l'eau. Souvent le cycle est situé sous la « cloche » du diagramme *T-s* pour faire usage du fait que l'évolution isotherme est aussi une évolution isobare, simple à réaliser (figure 3.12).

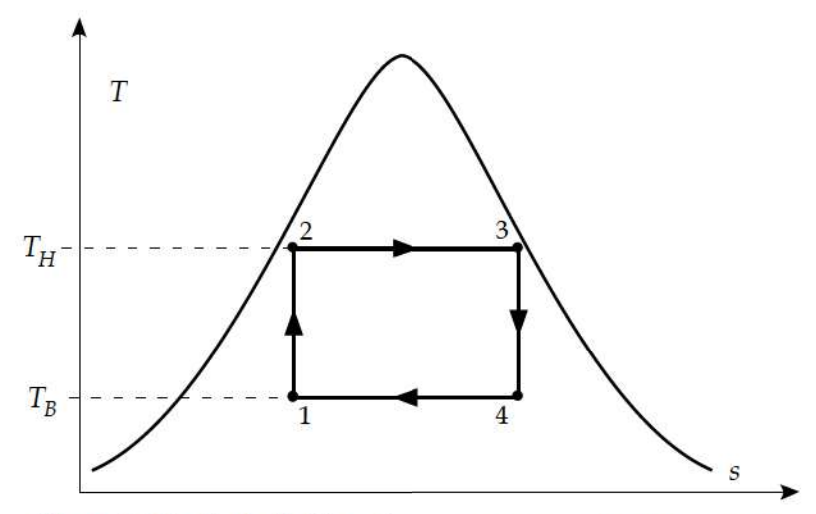



**Figure 3.12** Cycle de Carnot avec un mélange liquide-vapeur.

### 3.10 Le principe d'accroissement de l'entropie

La figure 3.14 illustre un cycle constitué d'une évolution irréversible *A*, et d'une évolution réversible *B*.

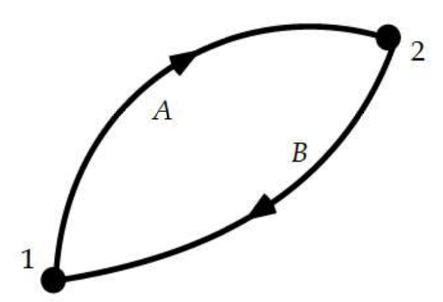



**Figure 3.13** Cycle irréversible

Puisque le cycle est irréversible l'inégalité de Clausius s'écrit :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_B < 0$$

Le chemin B étant réversible on trouve :

$$\int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_B = S_1 - S_2$$

alors :

$$\int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_A + \left(S_1 - S_2\right) < 0$$

c'est-à-dire :

$$S_2 - S_1 > \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{irr} \qquad (3\text{-}20)$$

pour une évolution infinitésimale :

$$dS > \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{irr} \tag{3-21}$$

Les résultats de la section 3.8 ainsi que ces derniers peuvent donc être combinés :

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \tag{3-22}$$

$$\boxed{dS \geq \frac{\delta Q}{T}} \tag{3-23}$$

avec : $>$ évolution irréversible
$=$ évolution réversible

En particulier, pour une évolution adiabatique, l'équation (3-22) devient :

$$\Delta S_{adiab} = \left(S_2 - S_1\right)_{adiab} \geq 0 \tag{3-24}$$

L'environnement d'un système est cette *partie du monde extérieur* qui effectue des échanges énergétiques avec le système. Concevons un macro-système constitué du système et de son environnement. En vertu de ce qui précède, ce macro-système serait isolé puisque tous les échanges énergétiques entre le système et son environnement y seraient confinés (notons que les limites de l'environnement et donc, du macro-système, dépendent de l'évolution considérée). En conséquence toutes les évolutions de ce macro-système sont par définition adiabatiques; la relation (3-24) s'appliquant à celui-ci. Si la variation d'entropie du macro-système est désignée par $\Delta S_{globale}$, il vient :

$$\boxed{\Delta S_{globale} = \Delta S_{sys} + \Delta S_{env} \geq 0} \tag{3-25}$$

où $\Delta S_{sys}$ : variation d'entropie du système
$\Delta S_{env}$ : variation d'entropie de l'environnement

Les énoncés du second principe que nous avions considérés jusqu'alors ne s'appliquaient qu'aux cycles de machine thermique et de réfrigération. Faisait défaut, en particulier, une formulation de celui-ci s'appliquant aux évolutions non cycliques. Le résultat (3-25) constitue justement cette formulation. Elle stipule que toute transformation du système s'accompagne d'une augmentation de l'entropie globale sauf dans le cas d'une évolution réversible, auquel cas, l'entropie globale se maintient.
Puisque toutes les évolutions réelles sont irréversibles, on observe toujours une augmentation de l'entropie globale. Ce nouvel énoncé du second principe est évidemment plus général que ceux de Kelvin-Planck et de Clausius; on le privilégie donc, en général, aux deux autres.
Le résultat (3-25) explique pourquoi un grand nombre de processus qui seraient réalisables au sens du premier principe, ne sont dans les faits jamais observés. Le transfert de chaleur de l'air froid vers la tasse de café chaud ne se produit jamais même s'il respecte le principe de

conservation d'énergie parce qu'un processus de ce type violerait le second principe : il donnerait lieu à une variation d'entropie globale négative.

Le calcul de $\Delta S_{env}$ peut, en général, être délicat et laborieux. Il arrive souvent, toutefois, que l'environnement du système soit un réservoir thermique. Par définition, ce dernier ne connaît que des évolutions isothermes. Si la température du réservoir est $T_0$ et que durant l'évolution il absorbe la chaleur $Q_{env}$, alors :

$$\Delta S_{env} = \frac{Q_{env}}{T_0} \tag{3-26}$$

Puisque la chaleur absorbée par l'environnement correspond à la chaleur perdue par le système,

$$Q_{env} = -Q_{1-2}$$

et

$$\Delta S_{env} = \frac{-Q_{1-2}}{T_o} \tag{3-27}$$

**Exemple 3.4** : Supposons que 2 kg d'eau liquide saturée à 100 °C sont vaporisés jusqu'à l'état de vapeur saturée lors d'un chauffage isobare à l'aide d'un élément chauffant à 250 °C. Quelle est l'augmentation globale d'entropie lors de cette évolution.

*Solution*

| ***État* 1** | ***État* 2** |
|---|---|
| $T_1 = 100\ °\text{C}$ | $T_2 = 100\ °\text{C}$ |
| $P_1 = 101{,}42\ \text{kPa}$ | $P_2 = 101{,}42\ \text{kPa}$ |
| $v_1 = 0{,}001044\ \text{m}^3/\text{kg}$ | $v_2 = 1{,}6719\ \text{m}^3/\text{kg}$ |
| $u_1 = 418{,}99\ \text{kJ/kg}$ | $u_2 = 2506{,}015\ \text{kJ/kg}$ |
| $h_1 = 419{,}10\ \text{kJ/kg}$ | $h_2 = 2675{,}57\ \text{kJ/kg}$ |
| $s_1 = 1{,}3070\ \text{kJ/kg.K}$ | $s_2 = 7{,}3541\ \text{kJ/kg.K}$ |

$$Q_{1-2} = m\left(u_2 - u_1\right) + mP\left(v_2 - v_1\right) \qquad \text{(ou encore : } Q_{1-2} = m\left(h_2 - h_1\right)\text{)}$$

$$Q_{1-2} = 4512{,}94\ \text{kJ}$$

$$\Delta S_{sys} = m\left(s_2 - s_1\right) \qquad \Delta S_{sys} = 12{,}0492\ \text{kJ/K}$$

$$\Delta S_{env} = \frac{-Q_{12}}{T_0} \qquad \Delta S_{env} = -8{,}6265\ \text{kJ/K}$$

$$\Delta S_{globale} = \Delta S_{sys} + \Delta S_{env} = 3{,}4677\ \text{kJ/K}$$

## 3.11 Relations *T ds*

Nous allons établir deux relations qui s'avéreront utiles pour la suite. La forme différentielle du premier principe s'écrit :

$$\delta q = du + \delta w$$

Si le travail est un travail d'expansion et que l'évolution est réversible, on peut écrire :

$$\delta w = Pdv; \quad \delta q = Tds$$

Le premier principe devient alors ;

$$Tds = du + Pdv \tag{3-28}$$

Considérons maintenant l'enthalpie massique, $h$.

$$h = u + Pv$$
$$dh = du + Pdv + vdP$$

En combinant cette dernière expression avec l'équation(3-28),

$$dh = Tds + vdP$$
$$Tds = dh - vdP \tag{3-29}$$

## 3.12 Variation d'entropie d'un gaz parfait.

Pour un gaz parfait, on a :

$$du = C_V dT \qquad \text{(équation (2-34))}$$
$$P = \frac{RT}{v} \qquad \text{(loi des gaz parfaits)}$$

En insérant ces expressions dans l'équation (3-28), on trouve :

$$Tds = C_V dT + RT\frac{dv}{v}$$

Si on divise par la température et qu'on intègre de part et d'autre, l'équation précédente devient :

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dT}{T} + R\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

Si la chaleur spécifique est considérée constante sur l'intervalle de température, on obtient :

$$s_2 - s_1 = C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \tag{3-30}$$

Par ailleurs, on a aussi : $dh = C_P dT; \quad v = \frac{RT}{P}$

Si ces expressions sont insérées dans l'équation (3-29), on trouve :

$$Tds = C_P dT - RT\frac{dP}{P}$$

En procédant comme précédemment, il vient :

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_P dT}{T} - R\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Et, si on considère la chaleur spécifique $C_p$ constante entre $T_1$ et $T_2$ :

$$s_2 - s_1 = C_P \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \qquad (3\text{-}31)$$

Les équations (3-30) et (3-31) permettent toutes deux d'établir la variation d'entropie massique d'un gaz parfait.

**Exemple 3.5** : Calculez la variation d'entropie massique lorsque l'air est chauffé de 300 K à 600 K et que la pression chute de 400 kPa à 300 kPa.

*Solution*

$$C_P = 1{,}0035\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}} \qquad R = 0{,}287\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}}$$

$$s_2 - s_1 = C_P \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 0{,}7781\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}}$$

*Un nouveau résultat*

Nous avons vu au chapitre 2 que pour un gaz parfait connaissant une évolution adiabatique quasi statique, la pression et le volume sont reliés par :

$$Pv^k = cte \qquad (3\text{-}32)$$

où : $k = \frac{C_P}{C_V}$

Puisqu'une évolution réversible est *a fortiori* quasi statique, il s'ensuit que pour un processus isentropique (adiabatique réversible), la relation (3-32) peut être employée.

**Exemple 3.6 :** Du méthane (gaz parfait) est comprimé au cours d'une évolution adiabatique réversible à partir de 200 kPa et 30 °C jusqu'à 500 kPa. Calculez le travail et la chaleur massiques.

*Solution*

On a : $R = 0,51835 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ $C_V = 1,7354 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ $k = 1,299$

Évolution isentropique $\Rightarrow Pv^k = cte$ (évolution polytropique d'exposant $k$)

On peut donc employer l'équation (2-12),

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{P_2}{P_1}\right]^{(k-1)/k} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 374,14 \text{ K}$$

*i) travail* : $$w_{1-2} = \frac{R(T_2 - T_1)}{1-k} = -123,3 \text{ kJ/kg}$$ équation (2-10)

*ii) chaleur* : $q_{1-2} = 0$ (adiabatique)

**Exemple 3.7 :** Un cycle de Carnot fonctionnant entre 300 K et 1200 K utilise 0,5 kg d'air comme système. La chaleur absorbée par l'air est de 50 kJ et la pression minimale atteinte par le système est de 100 kPa.

a) Établissez la pression en chacun des points du cycle;
b) calculez la chaleur et le travail pour chaque évolution;
c) calculez le rendement et montrez qu'il correspond à sa valeur théorique.

*Solution*

a) et b): Il s'agit d'un cycle de Carnot, alors en ce qui a trait aux différentes évolutions,

$$\left.\begin{matrix}1-2\\3-4\end{matrix}\right\} S = cte \quad \text{et gaz parfait, donc: } Pv^k = cte$$

$$\left.\begin{matrix}2-3\\4-1\end{matrix}\right\} T = cte \quad \text{et gaz parfait, donc: } Pv = cte \quad \text{et} \quad \Delta U = 0$$

Les diagrammes *P-V* et *T-S* du cycle en question sont illustrés ci-dessous.

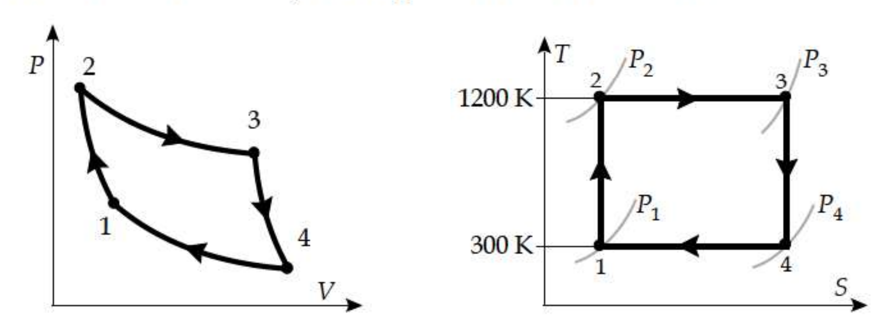



**Figure 3.14** Cycle de Carnot d'un gaz parfait

Se référant à l'énoncé et à la figure 3.14, on peut écrire :

$$T_2 = T_3 = 1200 \text{ K}; \quad T_1 = T_4 = 300 \text{ K}; \quad P_4 = 100 \text{ kPa}; \quad Q_{2-3} = 50 \text{ kJ}.$$

De plus : $R = 0,2870 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ ; $C_V = 0,7165 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ ; $k = 1,40$

*3-4 détente isentropique*

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{(k-1)/k} \quad \Rightarrow \quad P_3 = 12,8 \text{ MPa}$$

puisque $Q_{3-4} = 0$

$$W_{3-4} = m(u_3 - u_4) = mC_V(T_3 - T_4) = 322,43 \text{ kJ}$$

Notons qu'en ce qui concerne le travail on peut aussi procéder ainsi:

$$W_{3-4} = mR\frac{(T_4 - T_3)}{1-k} = 322,43 \text{ kJ}$$

*2-3 détente isotherme à $T = T_H$*

$$Q_{2-3} = W_{2-3} = 50 \text{ kJ}$$

or: $W_{2-3} = mRT_2 \ln\left(\frac{P_2}{P_3}\right) \quad \Rightarrow \quad P_2 = 17,1 \text{ MPa}$

puisque: $Q_{2-3} = T_2(S_3 - S_2)$ ,

il vient aussi: $S_3 - S_2 = 0,041667 \text{ kJ/K}$

*1-2 compression isentropique*

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{(k-1)/k} \quad \Rightarrow \quad P_1 = 133,3 \text{ kPa}$$

$$W_{1-2} = m(u_1 - u_2) = mC_V(T_1 - T_2) = -322,43 \text{ kJ}$$

*4-1 compression isotherme à $T = T_B$*

$$Q_{4-1} = T_4(S_1 - S_4) = -T_4(S_3 - S_2) = -12,5 \text{ kJ}$$

et: $W_{4-1} = Q_{4-1} = -12,5 \text{ kJ}$

c) $Q_H = Q_{2-3} = 50 \text{ kJ}$

$$Q_B = |Q_{4-1}| = 12,5 \text{ kJ}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_B}{Q_H} = 0,75$$

on vérifie que cela correspond bien à:

$$\eta_{th} = \eta_{Car} = 1 - \frac{T_B}{T_H} = 0{,}75$$

## 3.13 Variation d'enthalpie lors d'une évolution adiabatique réversible.

Considérons l'équation (3-29) :

$$Tds = dh - vdP$$

Pour une évolution isentropique $(ds = 0)$, il vient :

$$dh = vdP$$

alors :

$$h_2 - h_1 = \int_{P_1}^{P_2} vdP \qquad (3\text{-}33)$$

Si de surcroît la substance est incompressible (liquide comprimé, par exemple), alors :

$$v = cte$$

et :

$$h_2 - h_1 = v(P_2 - P_1) \qquad (3\text{-}34)$$

Or, pour un fluide en écoulement, lorsque l'on néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de gravité, et que le volume de contrôle ne comporte qu'une entrée et une sortie, le premier principe s'écrit (équation (2-50)) :

$$q_{1-2} - w_{1-2} = h_2 - h_1$$

Et pour une évolution adiabatique :

$$w_{1-2} = h_1 - h_2 \qquad (3\text{-}35)$$

Souvent la compression d'un liquide lors du passage dans une pompe est représentée par une évolution adiabatique réversible. Alors pour une évolution de pompage d'un liquide, on peut combiner les équations (3-34) et (3-35) pour trouver

$$w_{1-2} = v(P_1 - P_2) \qquad (3\text{-}36)$$

**Exemple 3.8 :** Calculez le travail par unité de masse nécessaire pour comprimer de façon isentropique de l'eau de 100 kPa à un MPa, en supposant que l'état initial est
a) un liquide saturé
b) une vapeur saturée.

*Solution*

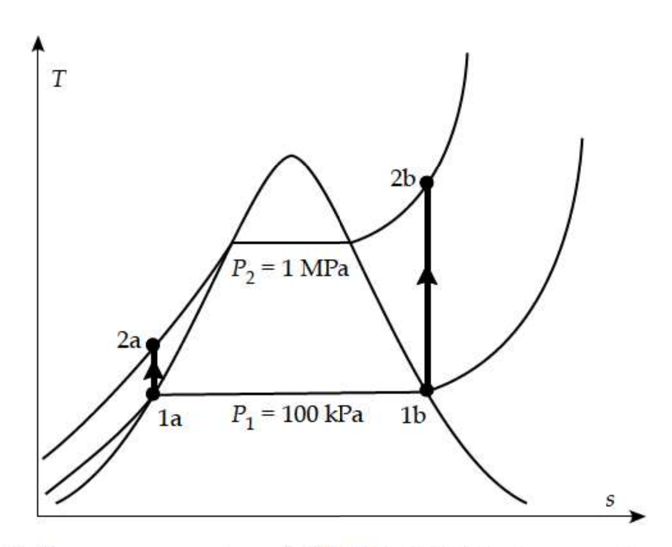



**Figure 3.15** Deux compressions de 100 kPa à 1 MPa dans un diagramme *T-s*

*i)* Pour la compression du liquide saturé (évolution 1a – 2a), on peut utiliser le résultat (3-36)

Il s'agit d'un fluide incompressible, on peut donc écrire :

$$v = v_{1a} = v_f(100 \text{ kPa}) = 0{,}001043 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$w_{1a-2a} = v_{1a}(P_1 - P_2)$$
$$= 0{,}0011043\ (100 - 1000) = -0{,}94 \text{ kJ/kg}$$

*ii)* Pour la vapeur saturée on doit procéder autrement puisque la vapeur est compressible. Il faut établir l'enthalpie aux deux états et utiliser (3-35).

$$\text{État 1b}\begin{cases} P_1 = 100 \text{ kPa} \\ x_{1b} = 1 \end{cases} \quad \text{alors : } \begin{matrix} h_{1b} = 2674{,}95 \text{ kJ/kg} \\ s_{1b} = 7{,}3588 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \end{matrix}$$

$$\text{État 2b}\begin{cases} P_2 = 1 \text{ MPa} \\ s_{2b} = s_{1b} = 7{,}3588 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \end{cases} \quad \text{alors : } h_{2b} = 3193{,}52 \text{ kJ/kg}$$

$$w_{1b-2b} = h_{1b} - h_{2b} = -\ 518{,}57 \text{ kJ/kg}$$

On constate que de l'eau sous forme vapeur requiert un travail 500 fois plus important que de l'eau sous forme liquide pour être comprimée entre les mêmes pressions.

## 3.14 EXERCICES

**Problème 1** On se propose de chauffer une maison pendant l'hiver avec une thermopompe. Il faut garder la maison à 20 °C en tout temps. On estime que lorsque la température extérieure descendra à -10 °C, la maison perdra 25 kW. Quelle est la puissance électrique minimale requise pour entraîner la thermopompe ?

Rép. : $\dot{W} = 2{,}558$ kW

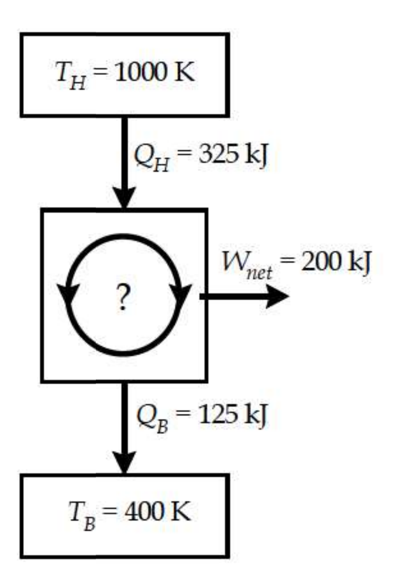
**Problème 2** Un réfrigérateur de Carnot fonctionne dans une pièce où la température est de 20 °C. Il faut retirer 5 kW de la chambre froide pour conserver sa température à -30 °C. Quelle puissance de moteur faut-il pour faire fonctionner ce réfrigérateur ?

Rép. : $\dot{W} = 1{,}03$ kW

**Problème 3** On se propose de construire une machine thermique cyclique pour fonctionner dans l'océan à un endroit où la température de l'eau est de 20 °C, près de la surface, et de 5 °C en profondeur. Quel est le rendement thermique maximal possible d'une telle machine ?

Rép. : $\eta_{th} = 0{,}051$

**Problème 4** On utilise une machine cyclique pour faire passer de la chaleur d'un réservoir chaud à un réservoir froid (voir figure ci-dessous). Déterminez s'il s'agit d'une machine thermique ou d'un cycle de réfrigération et dites si une telle machine est réversible, irréversible ou impossible à réaliser.




Rép. : Machine thermique ; impossible

**Problème 5** Soit une machine thermique de Carnot qui fonctionne entre des réservoirs dont les températures sont de 1 000 °C et 0 °C et qui reçoit 1 000 kJ de chaleur du réservoir chaud.

a) Représentez le cycle dans un diagramme *T-S*.
b) Calculez le travail net et le rendement thermique de ce cycle.
c) Calculez la variation d'entropie des réservoirs chaud et froid.

Rép. : b) $W_{net} = 785{,}6\ \text{kJ}$
c) $\Delta S_{chaud} = -0{,}785\ \text{kJ/K}$ ; $\Delta S_{froid} = +0{,}785\ \text{kJ/K}$

**Problème 6** Une thermopompe de Carnot utilise du R134a comme fluide moteur. De la chaleur est cédée par le R134a à 40 °C et, pendant cette évolution, il passe de l'état de vapeur saturée à l'état de liquide saturé. On fournit de la chaleur au R134a lorsqu'il est à 0 °C.

a) Représentez ce cycle dans un diagramme *T-s*.
b) Calculez le titre au début et à la fin de l'évolution isotherme à 0 °C.
c) Calculez le coefficient de performance du cycle.

Rép. : b) $x_4 = 0{,}262$ ; $x_1 = 0{,}978$
c) $\beta' = 7{,}82$

**Problème 7** Soit une machine de Carnot qui utilise de la vapeur d'eau comme fluide moteur et qui a un rendement thermique de 25 %. De la chaleur est transmise au fluide moteur à 300 °C et pendant cette évolution l'eau passe de l'état de liquide saturé à l'état de vapeur saturée.

a) Représentez ce cycle dans un diagramme *T-s*.
b) Calculez le titre de l'eau au début et à la fin du processus du refroidissement isotherme.
c) Calculez le travail net fourni par kilogramme d'eau.

Rép. :b) $x_1 = 0{,}2763$ ; $x_4 = 0{,}7798$
c) $w_{net} = 351{,}1\ \text{kJ/kg}$

**Problème 8** Un cylindre de 10 L fermé par un piston contient de la vapeur saturée de R134a à -20 °C. On augmente la force extérieure qui agit sur le piston pour comprimer le gaz de façon adiabatique et réversible jusqu'à ce qu'il atteigne une pression de 1,8 MPa. Calculez le travail effectué pendant l'évolution.

Rép. : $W_{1-2} = -3{,}61\ \text{kJ}$

**Problème 9** Un cylindre isolé et fermé par un piston contient du R134a à 10 °C. On déplace le piston pour comprimer la substance par un procédé réversible jusqu'à ce que la pression atteigne 2 MPa ; la température est alors de 70 °C. Au cours de l'évolution, il y a 400 kJ de travail fourni au système. Quel était le volume initial du cylindre ?

Rép. : $V_1 = 0{,}596\ \text{m}^3$

**Problème 10** Un cylindre isolé et fermé par un piston contient du R134a à 600 kPa et 40 °C dans un volume de 100 L. Le R134a se détend et déplace le piston jusqu'à ce que la pression dans le cylindre ne soit plus que de 100 kPa. On affirme qu'un travail de 75 kJ est effectué pendant cette évolution. Est-ce possible ?

Rép. : $\Delta S_{globale} = 0{,}0872 \text{ kJ/K}$ ; possible

**Problème 11** Un cylindre fermé par un piston contient du R134 à 200 kPa et 20 °C dans un volume de 1,5 m³. On comprime le gaz jusqu'à une température finale de 40 °C en lui fournissant un travail de 750 kJ. Pendant le procédé, 1 500 kJ de chaleur sont cédés au milieu ambiant à 20 °C. Une telle évolution est-elle possible ? Reprenez le calcul si le travail est de 400 kJ

Rép. : Premier cas : $\Delta S_{globale} = 0{,}716 \text{ kJ/K}$ ; possible
Deuxième cas : impossible.

**Problème 12** 10 kg de R134a sont initialement à 100 °C à un titre de 70 %. Le système se détend jusqu'à une pression de 200 kPa suivant la réception de 220 kJ de chaleur provenant d'un réservoir thermique à 110 °C. On affirme que le système effectue 80 kJ de travail sur le milieu ambiant pendant le procédé. Est-ce possible ?

Rép. : $\Delta S_{globale} = 2{,}10 \text{ kJ/K}$ ; possible

**Problème 13** Une masse de 0.,5 kg d'air dans un cylindre à 800 kPa et 1 000 K se détend jusqu'à 100 kPa au cours d'une évolution isotherme et réversible. Calculez la chaleur échangée ainsi que la variation d'entropie de l'air.

Rép. : $Q_{1-2} = 298{,}4 \text{ kJ}$ ; $\Delta S_{air} = 0{,}2984 \text{ kJ/K}$

**Problème 14** Soit une machine cyclique de Carnot ayant comme fluide moteur un kg d'air dans un ensemble cylindre-piston. Cette machine fonctionne entre des réservoirs à 1 000 K et 300 K. Au début de l'évolution de réchauffement à haute température, la pression est de 1 MPa et pendant l'évolution, le volume triple. Analysez chacune des quatre évolutions du cycle et calculez :

a) La pression, le volume et la température à chaque état ;
b) le travail et la chaleur pour chaque évolution.

Rép : a) $P_1 = 14{,}8$ kPa ; $T_1 = 300$ K ; $V_1 = 5{,}82$ m³
$P_2 = 1000$ kPa ; $T_2 = 1000$ K ; $V_2 = 0{,}287$ m³
$P_3 = 333$ kPa ; $T_3 = 1000$ K ; $V_3 = 0{,}861$ m³
$P_4 = 4{,}92$ kPa ; $T_4 = 300$ K ; $V_4 = 17{,}48$ m³

b) $W_{1-2} = -501,5 \text{ kJ}$ ; $Q_{1-2} = 0$
$Q_{2-3} = W_{2-3} = 315 \text{ kJ}$
$W_{3-4} = 501,5 \text{ kJ}$ ; $Q_{3-4} = 0$
$Q_{4-1} = W_{4-1} = -94,8 \text{ kJ}$

**Problème 15** Un cylindre fermé par un piston contient 0,4 kg d'argon à 100 kPa et 300 K. On comprime le gaz jusqu'à 600 kPa au cours d'une évolution réversible. Calculez le travail requis si l'évolution est :

a) adiabatique
b) isotherme
c) polytropique d'exposant $n = 1,3$

Rép. : a) $W_{1-2} = -39,24 \text{ kJ}$
b) $W_{1-2} = -44,76 \text{ kJ}$
c) $W_{1-2} = -42,64 \text{ kJ}$

**Problème 16** Un cylindre fermé par un piston contient 1 $m^3$ d'air aux conditions ambiantes de 100 kPa et 20 °C. On comprime l'air jusqu'à 800 kPa au cours d'une évolution réversible et polytropique d'exposant $n = 1,2$. L'air retourne ensuite à 100 kPa au moyen d'un procédé adiabatique réversible.

a) Illustrez les deux évolutions dans des diagrammes *P-v* et *T-s*.
b) Calculez la température finale et le travail net.
c) Quelle serait la chaleur absorbée par l'air pour revenir à l'état initial suivant une évolution isobare ?

Rép. : b) $T_3 = 228,9 \text{ K}$ ; $W_{1-3} = -48,8 \text{ kJ}$
c) $Q_{3-1} = 76,9 \text{ kJ}$

**Problème 17** De la vapeur d'eau entre dans une turbine à 2,0 MPa et 400 °C puis elle se détend lors d'une évolution adiabatique réversible pour sortir de la turbine à 10 kPa. Les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle sont négligeables entre les conditions d'entrée et de sortie de la turbine. La puissance de sortie de la turbine est de 800 kW. Calculez le débit-massique de vapeur à travers la turbine.

Rép. : $\dot{m} = 0,809 \text{ kg/s}$

# CHAPITRE 4

# CYCLES DE PUISSANCE ET DE RÉFRIGÉRATION

## Table des matières

**4.1 Le cycle de Rankine** **3**

**4.2 Le cycle de Rankine avec surchauffe** **6**

**4.3 Le cycle de Rankine à resurchauffe** **8**

**4.4 Le cycle à régénération** **9**

**4.5 Cycle de réfrigération à compression de vapeur** **13**
4.5.1 Choix du réfrigérant 16

**4.6 Écart entre les cycles réels et les cycles idéaux** **17**
4.6.1 Rendement adiabatique des turbines et des pompes 17

**4.7 Cycles de puissance à gaz et moteurs à combustion interne** **20**
4.7.1 Quelques éléments sur les moteurs à combustion interne 20
4.7.2 Le cycle d'Otto ou de Beau de Rochas 22
4.7.3 Cycle de Diesel 26

**4.8 EXERCICES** **27**

## 4.1 Le cycle de Rankine

Il a déjà été mentionné que le cycle de Carnot est le cycle plus performant impliquant deux réservoirs de température. Il est donc naturel, à prime abord, de considérer le cycle de Carnot pour les cycles de puissance. Toutefois les évolutions isothermes sont en général assez délicates à réaliser. Une façon élégante de contourner la difficulté est de situer le cycle sous la « cloche » de façon à ce que les transformations isothermes soient obtenues par des processus d'évaporation et de condensation isobares. On est donc amené à considérer l'emploi de substances qui connaîtront des changements de phase et l'eau, du fait de son abondance, vient immédiatement à l'esprit. Un cycle de Carnot fonctionnant ainsi présenterait l'allure illustrée à la figure 4.1.

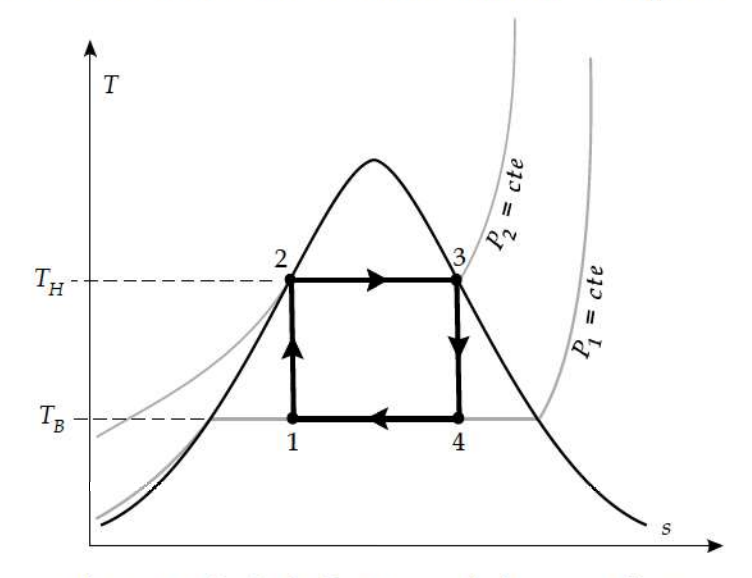



**Figure 4.1** Cycle de Carnot avec de la vapeur d'eau

Certaines difficultés subsistent, toutefois. À la sortie de la turbine, au point 4, la substance ne doit pas présenter un titre trop faible sans occasionner de problèmes de corrosion dans la turbine; on cherche typiquement à le maintenir au-dessus de 90%. Par ailleurs, on sait que le rendement thermique est d'autant plus élevé que l'écart entre $T_H$ et $T_B$ est important. Comme le montre la figure 4.2 ces deux considérations sont difficiles à concilier dans un cycle de Carnot.

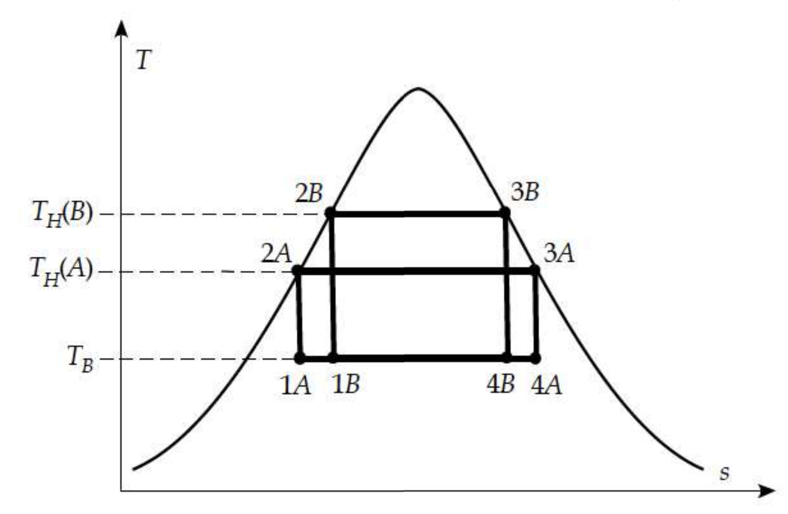



**Figure 4.2** Effets de la modification de $T_H$ sur le cycle de Carnot d'un mélange liquide-vapeur.

On présente deux cycles de Carnot qui ont la même température de condensation $T_B$ mais dont la température d'évaporation $T_H$ diffère d'un cycle à l'autre. On observe que le cycle *B* (1*B*-2*B*-3*B*-4*B*) présentera un rendement thermique plus élevé que le cycle *A* (1*A*-2*A*-3*A*-4*A*) parce que $T_H(B) > T_H(A)$. En contrepartie le titre à l'état 4*A* est plus élevé qu'à l'état 4*B*.

Finalement, et c'est le plus délicat, une pompe est conçue pour comprimer du liquide et un compresseur, du gaz. La compression d'un mélange liquide-vapeur comme il est illustré aux figures 4.1 et 4.2 (évolution 1-2) pose problème. Rankine proposa de condenser la substance jusqu'à l'état de liquide saturé et conçut le cycle de machine illustré à la figure 4.3.

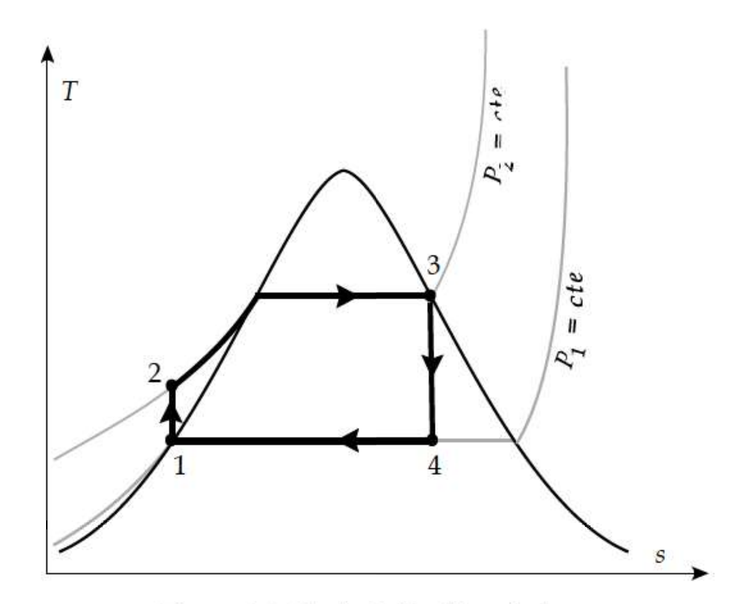



**Figure 4.3** Cycle de Rankine de base

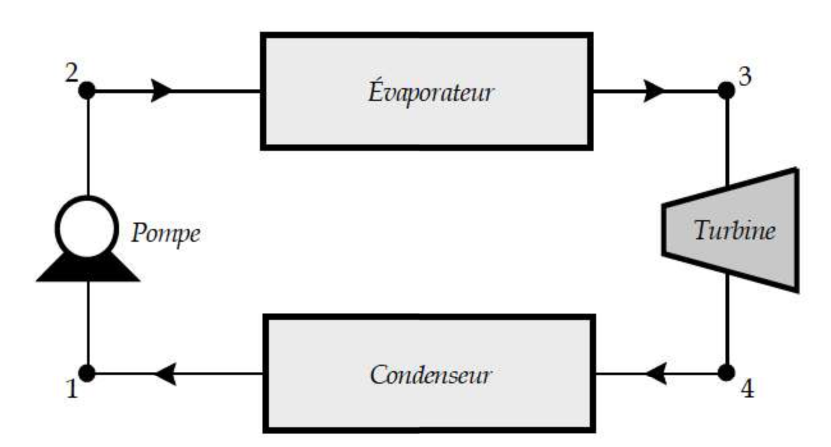



**Figure 4.4** Éléments d'une machine simple

Rappelons que les passages du système dans la pompe et la turbine sont présumés adiabatiques et que les échanges de chaleur dans l'évaporateur et le condenseur se font sans travail. Comme les volumes de contrôle ne présentent qu'une entrée et une sortie, le premier principe prend la forme de l'équation (2-50) :

$$q - w_{VC} = h_s - h_e \tag{4-1}$$

**Exemple 4.1** Soit un cycle de Rankine de base où l'eau est évaporée à 4 MPa. La pression du condenseur est de 10 kPa. Déterminez le rendement du cycle et comparez-le avec celui d'un cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures. Si le débit du fluide est de 20 kg/s, quelle est la puissance nette produite par le cycle?

*Solution*

Le cycle est illustré à la figure 4.3. Déterminons l'enthalpie massique en chaque point du cycle.

$$\text{État 1}\begin{cases} P_1 = 10 \text{ kPa} \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{alors : } \begin{array}{l} T_1 = 45{,}81\ °\text{C} \\ h_1 = 191.81 \text{ kJ/kg} \\ s_1 = 0{,}6492 \text{ kJ/kg•K} \end{array}$$

$$\text{État 2}\begin{cases} P_2 = 4 \text{ MPa} \\ s_2 = s_1 = 0{,}6492 \text{ kJ/kg•K} \end{cases} \qquad \text{alors : } \begin{array}{l} T_2 = 45{,}94\ °\text{C} \\ h_2 = 195{,}84 \text{ kJ/kg} \end{array}$$

$$\text{État 3}\begin{cases} P_3 = 4 \text{ MPa} \\ x_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{alors : } \begin{array}{l} T_3 = 250{,}36\ °\text{C} \\ h_3 = 2800{,}90 \text{ kJ/kg} \\ s_3 = 6{,}0697 \text{ kJ/kg•K} \end{array}$$

$$\text{État 4}\begin{cases} P_4 = 10 \text{ kPa} \\ s_4 = s_3 = 6{,}60697 \text{ kJ/kg•K} \end{cases} \qquad \text{alors : } \begin{array}{l} T_4 = 45{,}81\ °\text{C} \\ h_4 = 1920{,}71 \text{ kJ/kg} \\ x_4 = 0{,}7228 \end{array}$$

Ces valeurs peuvent être reportées dans un tableau où les quantités servant à caractériser l'état apparaissent en surbrillance.

| | ÉTAT 1 | ÉTAT 2 | ÉTAT 3 | ÉTAT 4 |
|---|---|---|---|---|
| *P* | 10 kPa | 4 MPa | 4 MPa | 10 kPa |
| *T* | 45,81 °C | 45,94 °C | 250,36 °C | 45,81 °C |
| *s* | 0,6492 | 0,6492 | 6,0697 | 6,0697 |
| *x* | 0 | NA | 1 | 0,7228 |
| *h* | 191,81 | 195,84 | 2800,90 | 1920,71 |

*Travaux :* *i) pompe* $w_P = h_1 - h_2 = -4{,}03 \text{ kJ/kg}$

*ii) turbine* $w_T = h_3 - h_4 = 880{,}19 \text{ kJ/kg}$

*iii) travail net* $w_{net} = w_T + w_P = 876{,}16 \text{ kJ/kg}$

$$\dot{W}_{net} = \dot{m}\, w_{net} = 17523 \text{ kW}$$

*Chaleurs* :

$$q_H = q_{2-3} = h_3 - h_2 = 2605{,}06 \text{kJ/kg}$$

$$q_B = |q_{4-1}| = |h_1 - h_4| = 1728{,}90 \text{ kJ/kg}$$

*Rendement thermique* :

$$\eta_{th} = \frac{w_{net}}{q_H} = 1 - \frac{q_B}{q_H} = 0{,}336$$

La figure 4.5 compare ce cycle avec un cycle de Carnot fonctionnant entre 45,81 °C et 250,36 °C (en grisé à la figure 4.5). Le rendement d'un tel cycle de Carnot est donné par

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_B}{T_H} = 1 - \frac{318,8}{523,4} = 0,391$$

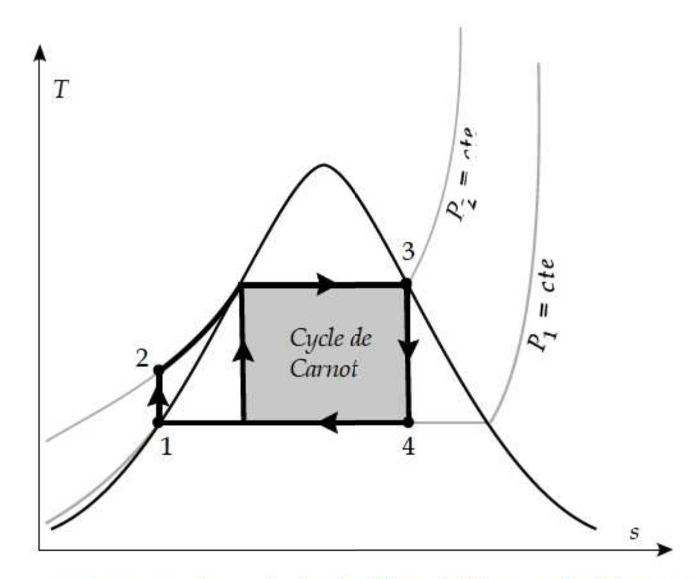



**Figure 4.5** Comparaison entre le cycle de Rankine de l'exemple 4.1 et un cycle de Carnot

## 4.2 Le cycle de Rankine avec surchauffe

Dans le cas de l'exemple précédent, on observe que le titre à la sortie de la turbine est plutôt faible (72,3%). Une façon de pallier ce problème est d'admettre que la substance soit amenée à l'état de vapeur surchauffée avant de lui permettre de se détendre dans la turbine : c'est le cycle de Rankine avec surchauffe (figure 4.6).

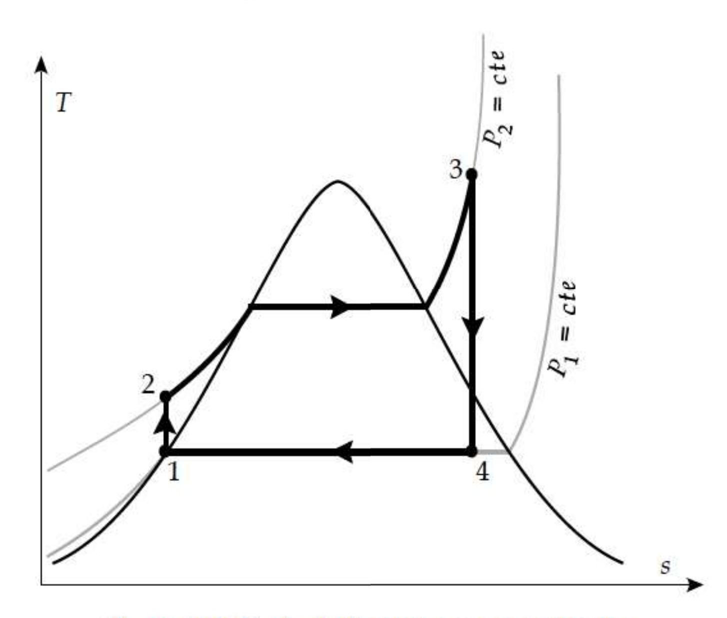



**Figure 4.6** Cycle de Rankine avec surchauffe

**Exemple 4.2** Soit un cycle de Rankine avec surchauffe où la vapeur d'eau sort de la chaudière et entre dans la turbine à 4 MPa et 400 °C. La pression du condenseur est de 10 kPa. Déterminez le rendement du cycle et établissez la puissance nette si le débit massique est de 20 kg/s.

*Solution*

Le cycle est illustré à la figure 4.6. Seuls les états 3 et 4 ont changé. Alors :

$$\text{État 3}\begin{cases} P_3 = 4 \text{ MPa} \\ T_3 = 400\ °\text{C} \end{cases} \qquad \text{alors : } \begin{matrix} h_3 = 3214{,}37 \text{ kJ/kg} \\ s_3 = 6{,}7712 \text{ kJ/kg•K} \end{matrix}$$

$$\text{État 4}\begin{cases} P_4 = 10 \text{ kPa} \\ s_4 = s_3 = 6{,}7712 \text{ kJ/kg•K} \end{cases} \qquad \text{alors : } \begin{matrix} T_4 = 45{,}81\ °\text{C} \\ h_4 = 2144{,}46 \text{ kJ/kg} \\ x_4 = 0{,}8163 \end{matrix}$$

| | ÉTAT 1 | ÉTAT 2 | ÉTAT 3 | ÉTAT 4 |
|---|---|---|---|---|
| *P* | 10 kPa | 4 MPa | 4 MPa | 10 kPa |
| *T* | 45,81 °C | 45,94 °C | 400 °C | 45,81 °C |
| *s* | 0,6492 | 0,6492 | 6,7712 | 6,7712 |
| *x* | 0 | NA | NA | 0,8163 |
| *h* | 191,81 | 195,84 | 3214,37 | 2144,46 |

** Les quantités servant à caractériser l'état apparaissent en surbrillance

*Travaux :*

*i) pompe* $w_P = h_1 - h_2 = -4{,}03$ kJ/kg

*ii) turbine* $w_T = h_3 - h_4 = 1069{,}91$ kJ/kg

*iii) travail net* $w_{net} = w_T + w_P = 1065{,}88$ kJ/kg

$\dot{W}_{net} = \dot{m}\, w_{net} = 21318$ kW

*Chaleurs* :

$q_H = q_{2-3} = h_3 - h_2 = 3018{,}53$ kJ/kg

$q_B = |q_{4-1}| = |h_1 - h_4| = 1952{,}65$ kJ/kg

*Rendement thermique* : $\eta_{th} = \dfrac{w_{net}}{q_H} = 0{,}353$

ou, alternativement : $\eta_{th} = 1 - \dfrac{q_B}{q_H} = 0{,}353$

Notons que le titre s'est élevé bien qu'il n'atteigne pas encore 90%. Un résultat bienvenu de la modification réside aussi dans l'amélioration du rendement. Ce résultat peut surprendre *a priori* puisque le changement introduit beaucoup d'irréversibilité dans le cycle. En effet, la chaudière (évaporateur) doit être minimalement à 400 °C si on veut chauffer l'eau à cette température. Le chauffage se fait donc en présence d'un gradient de température important. Ce fait est toutefois compensé par l'augmentation de l'écart entre les haute et basse températures résultant en une augmentation globale du rendement.

## 4.3 Le cycle de Rankine à resurchauffe

Une façon de diminuer la teneur en humidité lors de la détente (et d'obtenir un meilleur rendement) est de réchauffer la substance à nouveau par un deuxième passage dans l'évaporateur suite à une première détente dans une turbine à haute pression (H. P.). La matière est ensuite acheminée vers une deuxième turbine à basse pression (B. P.) pour compléter la détente jusqu'à la pression du condenseur. Considérez les figures 4.7 et 4.8 à cet effet.

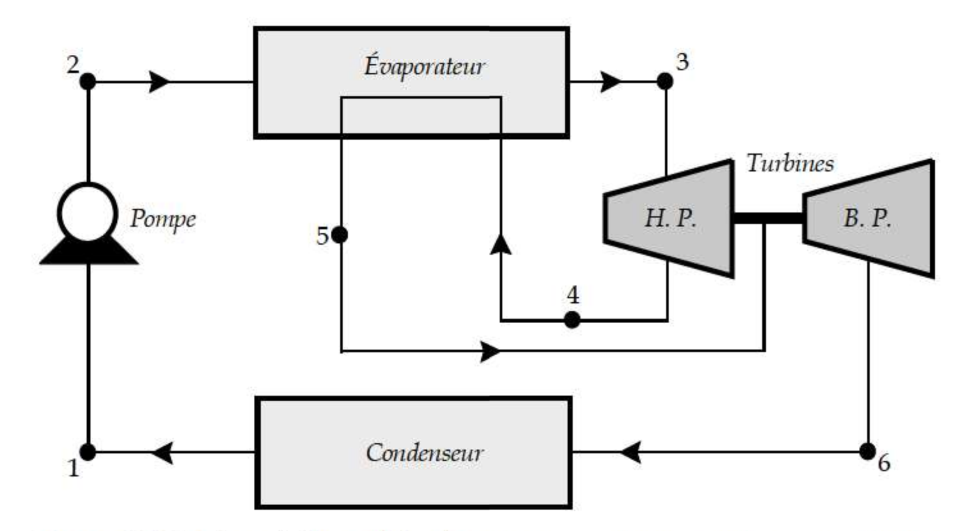



**Figure 4.7** Schéma de la machine fonctionnant selon un cycle à resurchauffe

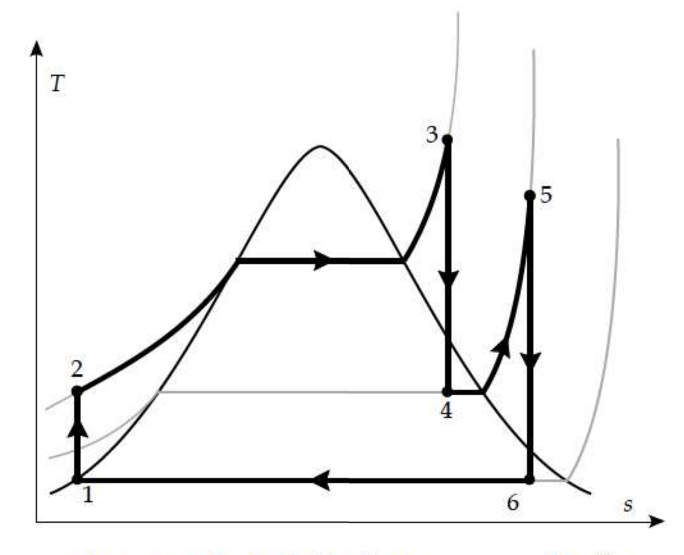



**Figure 4.8** Cycle de Rankine avec resurchauffe

Notons que si le chauffage pouvait se poursuivre jusqu'à un point 3 situé à la verticale du point 6 de la figure 4.8, l'étape de resurchauffe ne serait plus requise pour atteindre un titre satisfaisant à l'entrée du condenseur Toutefois, en raison de considérations métallurgiques, les températures maximales doivent demeurer sous un certain seuil.

**Exemple 4.3 :** Considérons un cycle à resurchauffe fonctionnant avec de la vapeur d'eau comme fluide moteur. La vapeur sort de la chaudière et entre dans la turbine haute pression à 4 MPa et 400 °C. Après une détente jusqu'à 400 kPa, la vapeur est resurchauffée jusqu'à 400 °C puis détendue jusqu'à 10 kPa, dans la turbine à basse pression. Déterminez le rendement du cycle.

*Solution*

Le schéma de ce cycle correspond à celui de la figure 4.4. Résumons les caractéristiques du fluide en chaque point du cycle dans un tableau.

| | ÉTAT 1 | ÉTAT 2 | ÉTAT 3 | ÉTAT 4 | ÉTAT 5 | ÉTAT 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 10 kPa | 4 MPa | 4 MPa | 400 kPa | 400 kPa | 10 kPa |
| $T$ | 45,81 °C | 45,94 °C | 400 °C | 143,6 °C | 400 °C | 45,81 °C |
| $s$ | 0,6492 | 0,6492 | 6,7712 | 6,7712 | 7,9001 | 7,9001 |
| $x$ | 0 | NA | NA | 0,9757 | NA | 0,9668 |
| $h$ | 191,81 | 195,84 | 3214,37 | 2686.29 | 3273,86 | 2504,53 |

** Les quantités servant à caractériser l'état apparaissent en surbrillance

*Travaux*

*Turbines : i) haute pression* $w_{T1} = h_3 - h_4 = 528{,}1 \text{ kJ/kg}$

*ii) basse pression* $w_{T2} = h_5 - h_6 = 769{,}3 \text{ kJ/kg}$

*Pompe :* $w_P = h_1 - h_2 = -4{,}0 \text{ kJ/kg}$

*Travail net :* $w_{net} = w_{T1} + w_{T2} + w_P = 1293{,}4 \text{ kJ/kg}$

*Chaleurs : i) 1er passage* $q_{2-3} = h_3 - h_2 = 3018{,}5 \text{ kJ/kg}$

*ii) 2e passage* $q_{4-5} = h_5 - h_4 = 587{,}6 \text{ kJ/kg}$

$$q_H = q_{2-3} + q_{4-5} = 3606{,}1 \text{ kJ/kg}$$

$$q_B = |q_{6-1}| = |h_1 - h_6| = 2312{,}1 \text{ kJ/kg}$$

*Rendement :*

$$\eta = \frac{w_{net}}{q_H} = 1 - \frac{q_B}{q_H} = 0{,}359$$

## 4.4 Le cycle à régénération

Le cycle à régénération constitue une modification importante du cycle de Rankine : le propos est de réchauffer une partie du système en la mettant en contact avec une autre partie à une température plus élevée, économisant de ce fait l'énergie totale nécessaire à son fonctionnement. Cette intervention nécessite l'emploi d'un ou de plusieurs réchauffeurs à mélange. Le réchauffeur à mélange est un réservoir isolé thermiquement de l'extérieur où sont mélangés de la vapeur extraite d'une turbine à du liquide comprimé issu d'une pompe (points 1 et 2 de la figure 4.9, respectivement). Les conditions sont telles qu'à sa sortie, le mélange se retrouve à l'état de liquide saturé (point 3 de la figure 4.9). Le processus s'effectue à pression constante, c'est-à-dire $P_1 = P_2 = P_3$.

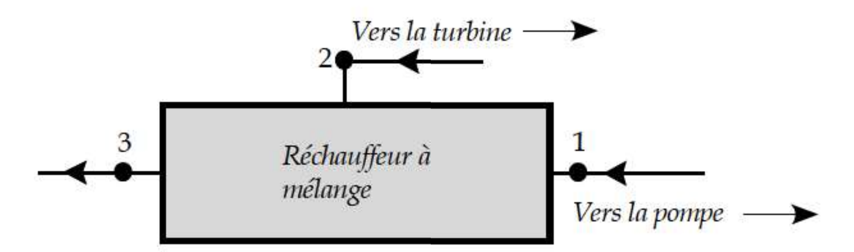



**Figure 4.9** Schéma d'un réchauffeur à mélange

L'équation de continuité (2-48) s'écrit alors :

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 \tag{4-2}$$

Le volume comportant plusieurs entrées et sorties, le premier principe prendra alors la forme spécifiée par l'équation (2-49). Toutefois, puisqu'aucun travail ni chaleur ne sont échangées avec l'environnement, cette équation devient, dans les circonstances :

$$\dot{Q} - \dot{W}_{VC} = 0 = \sum_s \dot{m}h - \sum_e \dot{m}h$$

c'est-à-dire :

$$\dot{m}_3 h_3 = \dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2 \tag{4-3}$$

Les figures 4.10 et 4.11 montrent le schéma de la machine et le cycle à régénération dans un diagramme $T$-$s$. Comme on peut le constater, une partie du système (la fraction $\alpha$) est extraite après avoir effectué une détente partielle dans la turbine jusqu'à la pression $P_6$. Le reste du système (la fraction 1-$\alpha$) poursuit sa détente pour être ensuite acheminée vers le condenseur. Puisque les deux portions du système sont à des pressions différentes ($P_1 < P_6$), la fraction (1-$\alpha$) est comprimée afin de l'amener à la pression de la substance avec laquelle elle sera mélangée dans le réchauffeur. Après le mélange (état 3), tout le système est amené à la pression de l'évaporateur ($P_4$). Observons qu'à la sortie du condenseur ainsi qu'à la sortie du mélangeur, la matière est à l'état de liquide saturé.

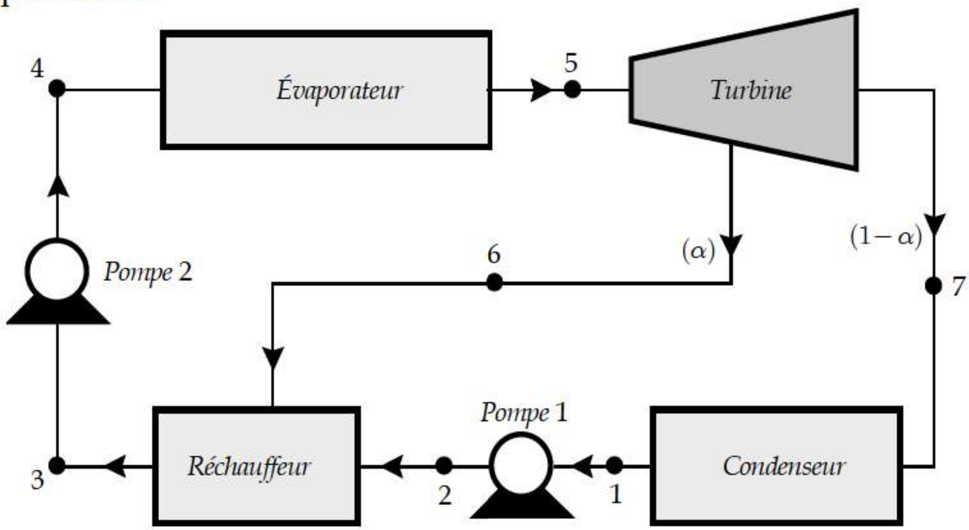



**Figure 4.10** Schéma de la machine fonctionnant selon un cycle à régénération

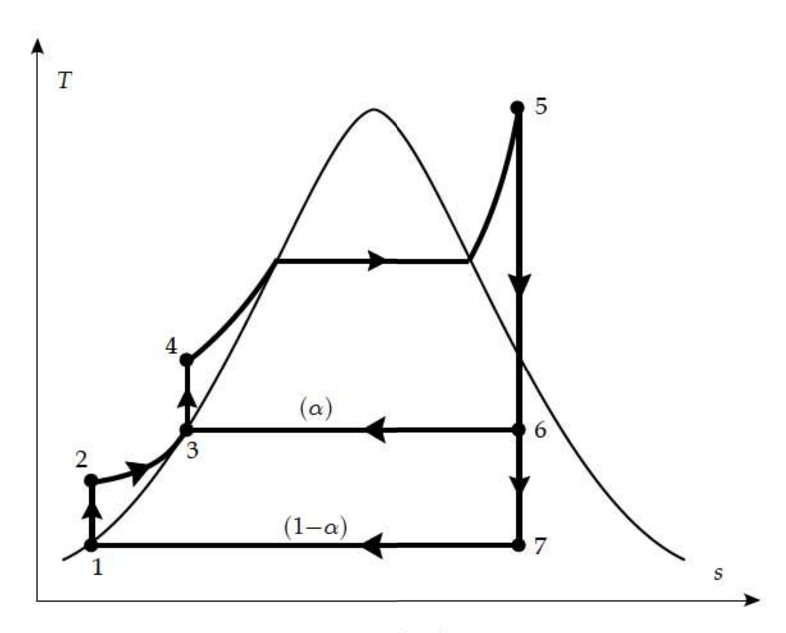



**Figure 4.11** Cycle de Rankine à régénération

Définissons α, la fraction du débit <u>total</u> qui est extraite :

$$\alpha = \frac{\dot{m}_6}{\dot{m}_5} \quad (4\text{-}4)$$

alors :

$$1-\alpha = \frac{\dot{m}_7}{\dot{m}_5}$$

En écrivant l'équation (4-3) pour le volume de contrôle du réchauffeur de la figure 4.10, il vient :

$$\dot{m}_3 h_3 = \dot{m}_2 h_2 + \dot{m}_6 h_6$$

Si on divise de part et d'autre part $\dot{m}_5$, et se rappelant que $\dot{m}_3 = \dot{m}_5$ et $\dot{m}_2 = \dot{m}_7$, on trouve

$$h_3 = \alpha h_6 + (1-\alpha) h_2$$

et :

$$\alpha = \frac{h_3 - h_2}{h_6 - h_2} \quad (4\text{-}5)$$

*Quelques remarques*

Puisque les différents éléments de la machine sont parcourus par des débits différents, quel sens doit-on donner aux concepts de chaleur massique ou de travail massique? Nous conviendrons d'utiliser le débit total (l'ensemble du système, donc) aux fins de calcul de ces grandeurs. Ainsi, considérant le volume de contrôle de la turbine, l'équation (2-49) s'écrit :

$$\dot{W}_T = \dot{m}_5 h_5 - (\dot{m}_6 h_6 + \dot{m}_7 h_7)$$

Divisant de part et d'autre par $\dot{m}_5$, on trouve :

$$w_T = h_5 - \left(\alpha h_6 + (1-\alpha)h_7\right) \tag{4-6}$$

où :

$$w_T = \frac{\dot{W}_T}{\dot{m}_5} \tag{4-7}$$

Des considérations de même nature conduisent à :

$$w_{P1} = (1-\alpha)(h_1 - h_2) \tag{4-8}$$

$$w_{P2} = (h_3 - h_4) \tag{4-9}$$

$$q_H = q_{4-5} = h_5 - h_4 \tag{4-10}$$

$$q_B = |q_{7-1}| = |(1-\alpha)(h_1 - h_7)| \tag{4-11}$$

**Exemple 4.4 :** Soit un cycle à régénération utilisant de la vapeur d'eau comme fluide moteur, tel qu'il est illustré à la figure 4.12. La vapeur sort de la chaudière et entre dans la turbine à 4 MPa et 400 °C. Après une détente jusqu'à 400 kPa, une partie de la vapeur est extraite de la turbine et dirigée vers un réchauffeur à mélange. La pression dans le réchauffeur est de 400 kPa. La vapeur non extraite se détend jusqu'à 10 kPa. Déterminez le rendement de ce cycle.

*Solution*

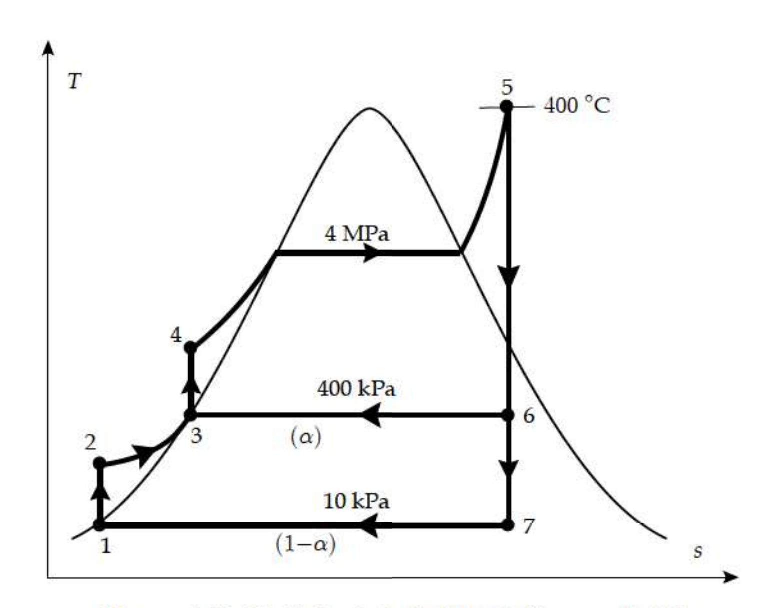



**Figure 4.12** Cycle à régénération de l'exemple 4.4

Soit *f*, la fraction du débit total qui passe par l'état considéré

| | ÉTAT 1 | ÉTAT 2 | ÉTAT 3 | ÉTAT 4 | ÉTAT 5 | ÉTAT 6 | ETAT 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 10 kPa | 400 kPa | 400 kPa | 4 MPa | 4 MPa | 400 kPa | 10 kPa |
| $T$ | 45,81 °C | 45.82 °C | 143,61 °C | 143,99 °C | 400 °C | 143,61 °C | 45,81 °C |
| $s$ | 0,6492 | 0,6492 | 1,7766 | 1,7766 | 6,7712 | 6,7712 | 6,7712 |
| $x$ | 0 | NA | 0 | NA | NA | 0,9756 | 0,8163 |
| $h$ | 191,81 | 192,2 | 604,72 | 608,62 | 3214,37 | 2686,29 | 2144,46 |
| $f$ | 0,835 | 0,835 | 1 | 1 | 1 | 0,165 | 0,835 |

** Les quantités servant à caractériser l'état apparaissent en surbrillance

La fraction du débit total qui est extraite de la turbine est obtenue en appliquant le premier principe au volume de contrôle de la turbine (équation(4-3)) et il vient (équation (4-5)) :

$$(1-\alpha)h_2 + \alpha h_6 = h_3$$
$$\alpha = \frac{h_3 - h_2}{h_6 - h_2} = 0{,}165 \qquad \text{et} \quad 1-\alpha = 0{,}835$$

*Travaux :*

*Turbine:* $w_T = h_5 - \left[\alpha h_6 + (1-\alpha)h_7\right] = 980{,}3 \text{ kJ/kg}$

*Pompes:* *i)* $w_{P1} = (1-\alpha)(h_1 - h_2) = -0{,}334 \text{ kJ/kg}$

*ii)* $w_{P2} = h_3 - h_4 = -3{,}9 \text{ kJ/kg}$

*Travail net* $w_{net} = w_T + w_{P1} + w_{P2} = 976.1 \text{ kJ/kg}$

*Chaleurs :*

$$q_H = q_{4-5} = h_5 - h_4 = 2605{,}8 \text{ kJ/kg}$$
$$q_B = |q_{7-1}| = |h_1 - h_7| = 1629{,}7 \text{ kJ/kg}$$

*Rendement :*

$$\eta = \frac{w_{net}}{q_H} = 1 - \frac{q_B}{q_H} = 0{,}375$$

## 4.5 Cycle de réfrigération à compression de vapeur

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, il est possible de faire transiter de la chaleur d'un corps à basse température vers un corps à température plus élevée en mettant à contribution un cycle de réfrigération. Selon le contexte, l'appareil concerné agira comme réfrigérateur ou comme pompe thermique. Un cycle de Carnot parcouru dans le sens antihoraire dans un diagramme *T-s* constitue un cycle de réfrigération idéal et comme précédemment servira de base à partir de laquelle on développera le cycle de réfrigération à compression de vapeur.

Considérons le cycle de réfrigération de Carnot illustré à la figure 4.13. Comme pour la machine thermique, les deux évolutions isothermes (2 à 3 et 4 à 1) sont faciles à réaliser si elles sont effectuées à pression constante dans la région de mélange liquide-vapeur. Toutefois, les évolutions 3-4 et 1-2 ne sont pas reproduites dans la réalité. La compression 1-2 implique la compression d'un mélange liquide-vapeur, ce qui est difficilement réalisable, comme nous l'avons mentionné, déjà.

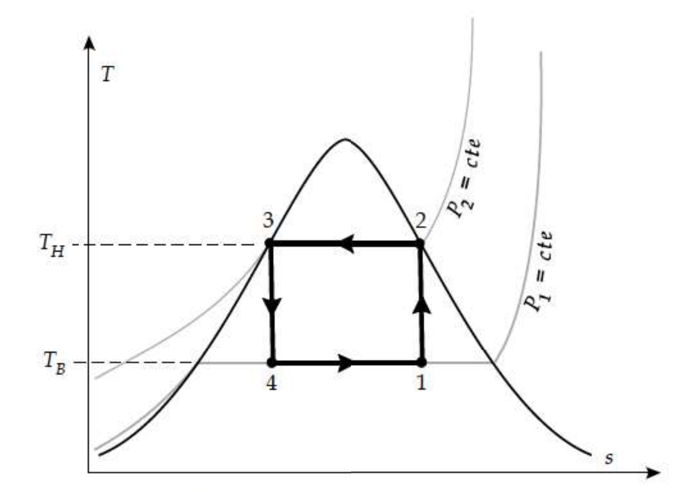



**Figure 4.13** Cycle de réfrigération de Carnot

Afin de pouvoir employer un compresseur, le point 1 est déplacé vers la droite sur le diagramme et on en fait un état de vapeur saturée. Par ailleurs, l'évolution de détente adiabatique réversible (3-4) est désirable du point de vue de l'efficacité du cycle mais en termes concrets, elle est couteuse et le travail qu'elle produit n'est pas très important. La turbine est donc remplacée par une simple soupape de détente. Ce qui résulte comme cycle est illustré à la suite.

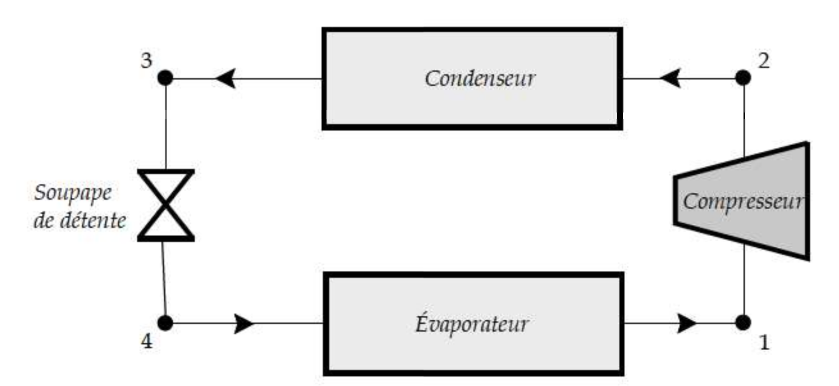



**Figure 4.14** Machine fonctionnant selon un cycle de réfrigération à compression de vapeur

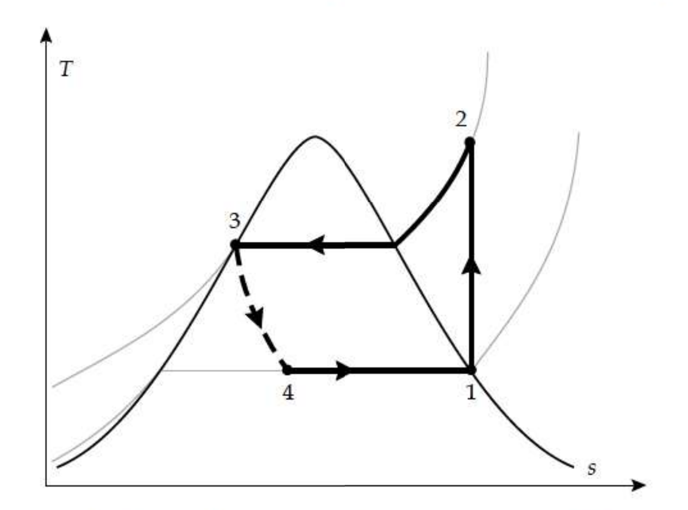



**Figure 4.15** Cycle de réfrigération à compression de vapeur

*La soupape de détente*

Deux exemples de soupapes de détente sont illustrés à la figure 4.16. Lors du passage à travers la constriction, la substance se détend voyant sa pression et sa température chuter.

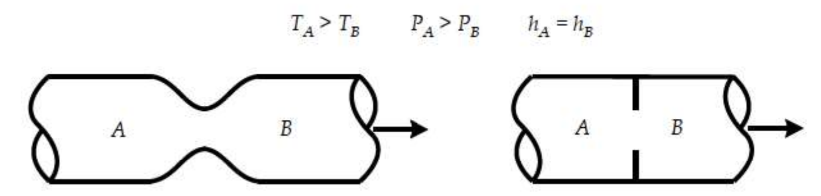



**Figure 4.16** Deux exemples de soupapes de détente

Si on écrit le premier principe appliqué au volume de contrôle de la soupape, il vient (équation (4-1) ),

$$q - w_{VC} = 0 - 0 = h_B - h_A \text{ ,}$$

parce que l'évolution est sans travail et qu'elle est trop rapide pour mettre un échange de chaleur. Il vient donc l'évolution de $A$ à $B$ est *isenthalpique* :

$$h_B = h_A \tag{4-12}$$

La détente dans la soupape est tout à fait irréversible. On ne connaît de l'évolution sinon qu'elle relie les états de départ et de fin; c'est la raison de l'emploi de pointillés à la figure 4.15 entre les états 3 et 4.

**Exemple 4.5 :** Un cycle de réfrigération à compression de vapeur utilise du R134a comme réfrigérant et fonctionne entre 140 et 800 kPa avec un débit massique de 0,05 kg/s. Calculez :

a) les taux de chaleur échangés dans l'évaporateur et le condenseur,
b) la puissance du compresseur,
c) les coefficients de performance du cycle.

*Solution*

$$\text{État 1}\begin{cases} P_1 = 140 \text{ kPa} \\ x_1 = 1 \end{cases} \qquad \text{alors : } \begin{matrix} h_1 = 387{,}3 \text{ kJ/kg} \\ s_1 = 1{,}7402 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \end{matrix}$$

$$\text{État 2}\begin{cases} P_2 = 800 \text{ kPa} \\ s_2 = s_1 = 1{,}7402 \text{ kJ/kg}\bullet\text{K} \end{cases} \qquad \text{alors : } h_2 = 423{,}5 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{État 3}\begin{cases} P_3 = 800 \text{ kPa} \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{alors : } h_3 = 243{,}65 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{État 4}\begin{cases} P_4 = 140 \text{ kPa} \\ h_4 = h_3 = 243{,}65 \text{ kJ/kg} \end{cases}$$

*Travail :*

$$w_C = h_1 - h_2 = -36{,}2 \text{ kJ/kg}$$
$$\dot{W}_C = -1{,}81 \text{ kW}$$

*Chaleurs :*

*i)* $$q_B = h_1 - h_4 = 143{,}67 \text{ kJ/kg}$$
$$\dot{Q}_B = 7{,}18 \text{ kW}$$

*ii)* $$q_H = |h_3 - h_2| = 179{,}87 \text{ kJ/kg}$$
$$\dot{Q}_H = 8{,}99 \text{ kW}$$

*Coefficients de performance :*

pour le réfrigérateur : $$\beta = \frac{\dot{Q}_B}{|\dot{W}_C|} = \frac{7{,}18}{1{,}81} = 3{,}97$$

pour la pompe thermique : $$\beta' = \frac{\dot{Q}_H}{|\dot{W}_C|} = \frac{8{,}99}{1{,}81} = 4{,}97$$

On vérifie que le premier principe est respecté. En effet :

$$\dot{Q}_B - \dot{Q}_H = \dot{W}_C$$

### 4.5.1 Choix du réfrigérant

Afin que les transferts de chaleur dans l'évaporateur et le condenseur se fassent à l'intérieur d'un intervalle de temps raisonnable, un écart de température minimal doit être maintenu entre les réservoirs thermiques et le réfrigérant. De façon concrète, on cherche à établir une différence de 10 °C entre ceux-ci. Ainsi, si le corps froid (l'intérieur d'un congélateur, par exemple) doit être maintenu à -10 °C, on fera en sorte que la température du réfrigérant dans l'évaporateur se situe autour de -20 °C. Par ailleurs, c'est lors de son passage dans l'évaporateur que le réfrigérant atteint sa pression la plus faible. Pour éviter une contamination du système par l'air environnant, on s'assure que cette pression dépasse la pression atmosphérique (à l'exemple que nous venons de faire, celle-ci vaut 140 kPa.

D'autres considérations sur lesquelles nous n'élaborerons pas interviennent dans le choix de la substance. À titre d'exemples : la chaleur de vaporisation $h_{fg}$, la conductivité thermique de la substance et, bien entendu, son coût, sa disponibilité et sa dangerosité. Plusieurs substances ont été utilisées comme réfrigérant. Le premier réfrigérateur, conçu autour de 1860, faisait usage d'ammoniac dissous dans de l'eau (cycle à absorption de gaz). L'ammoniac présente des caractéristiques thermodynamiques qui le rendent particulièrement attrayant pour ce type d'usage mais il est toxique, toutefois. Il est toujours employé aujourd'hui pour les réfrigération et climatisation industrielles et commerciales. Dans les années 30, on a développé une famille de composés, les chlorofluorocarbures ou CFC dont un représentant, le Fréon 12, a été beaucoup utilisé pour tous les usages domestiques : réfrigération et climatisation domestiques, automobiles, etc. Au milieu des années 70, on a conclu que l'emploi de ces composés vidait l'atmosphère de son ozone. Le protocole de Montréal signé en 1987 et entré en vigueur en 1989, prévoyait le retrait à terme de tous ces composés (ainsi que plusieurs autres) pour être remplacés

par d'autres mon délétères pour la couche d'ozone. Le choix s'est porté, en bonne partie sur les hydrofluorocarbures (HFC) et en particulier sur le HFC134a ou R134a.

Le cycle décrit à l'exemple 4.5 peut être effectué par les trois substances mentionnées plus haut : l'ammoniac, le Fréon 12 ainsi que le R134a. Voyons comment les cycles se comparent.

| | **Fréon 12** | **Fréon 134 a** | **Ammoniaque** |
|---|---|---|---|
| $T_4$ | -21,9°C | -18,8°C | -26,4 °C |
| $T_1$ | -21,9°C | -18,8°C | -26,4 °C |
| $T_2$ | 43,5 °C | 39,0 °C | 95,3 °C |
| $T_3$ | 32,7 °C | 31,3 °C | 17,8 °C |
| $\beta$ | 3,59 | 3,97 | 4,57 |

On remarque que l'ammoniac présente des caractéristiques très intéressantes. En effet, la température dans le condenseur peut être particulièrement basse. Et, malgré le grand écart entre les températures minimale et maximale (-26 °C et 95,3 °C, respectivement), c'est aussi le cycle qui présente le plus grand coefficient de performance.

## 4.6 Écart entre les cycles réels et les cycles idéaux

Les cycles décrits plus hauts sont idéaux en ce sens que chacune des composantes est présumée fonctionner de façon idéale. On comprendra qu'un ensemble de facteurs feront en sorte que les cycles effectivement observés s'écarteront de façon appréciable dans certains cas, de leurs pendants idéaux. Parmi les facteurs en question, mentionnons les pertes dans la tuyauterie dues au frottement visqueux et à la chaleur cédée à l'environnement. Ces pertes entraîneront une chute de pression et de température entre l'entrée et la sortie de la conduite. Par ailleurs, les écoulements à travers la turbine et la pompe ne se font pas sans échange de chaleur (ce qui entraîne des pertes relativement mineures) et sont irréversibles. Considérons ce dernier fait, plus avant.

### 4.6.1 Rendement adiabatique des turbines et des pompes

L'évolution idéale lors du passage dans une turbine est isentropique. L'irréversibilité inhérente à l'écoulement conduira à une augmentation de l'entropie. Il en va de même en ce qui a trait au passage dans la pompe. La figure 4.17 illustre ce dont nous parlons. Les points $2_s$ et $4_s$ correspondent aux états qui suivraient des évolutions idéales dans la pompe et la turbine, respectivement, alors que les points $2_a$ et $4_a$ correspondent aux points à la sortie de chacune de ces composantes qui sont obtenus dans les faits.

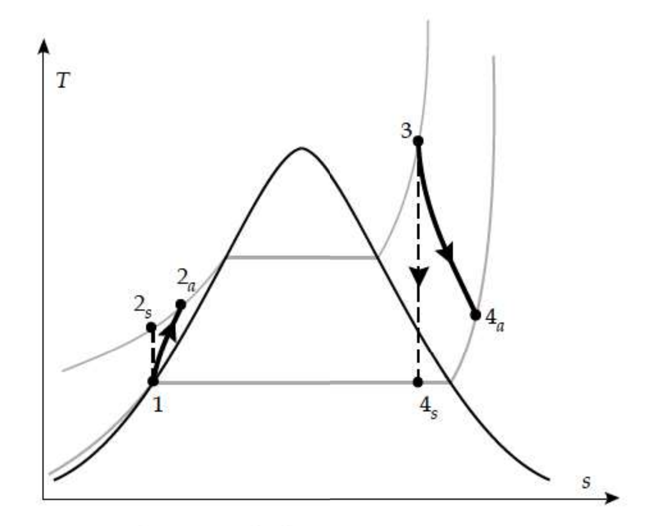



**Figure 4.17** Compression et détentes adiabatiques idéales et réelles dans un diagramme *T-s*

*Turbines*

Le rendement d'une turbine est défini comme le rapport du travail produit par la turbine, $w_a$, et du travail qui serait produit par une turbine idéale opérant entre les mêmes pressions, $w_s$.

$$\eta_T = \frac{w_a}{w_s} \tag{4-13}$$

Or, le travail se calcule par : $w = h_{entrée} - h_{sortie}$

Alors :
$$\eta_T = \frac{h_3 - h_{4a}}{h_3 - h_{4s}} \tag{4-14}$$

Les grandes turbines présentent typiquement des rendements adiabatiques supérieurs à 90 %.

*Pompes*

Le rendement d'une pompe est défini de façon analogue au rendement adiabatique d'une turbine mais puisque la pompe réelle devra fournir un travail plus important que la pompe idéale, l'équation (4-13) est modifiée en conséquence.

$$\eta_P = \frac{w_s}{w_a} = \frac{h_1 - h_{2s}}{h_1 - h_{2a}} \tag{4-15}$$

**Exemple 4.6 :** Supposons que la turbine et la pompe du cycle de Rankine décrit à l'exemple 4.2 présentent toutes deux un rendement adiabatique de 90 %. Calculez le nouveau rendement du cycle, ainsi que l'augmentation d'entropie massique dans la turbine et dans la pompe.

*Solution*

NB : Les travaux de la turbine idéale et de la pompe idéale ont été calculés à l'exemple 4.2.

*Turbine :*

$$w_{Ta} = \eta_T w_{Ts} = 0,9 * 1069,91 = 962,92 \text{ kJ/kg}$$

$$h_3 - h_{4a} = 962,92 \text{ kJ/kg} \quad \Rightarrow \quad h_{4a} = 2251,45 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{État } 4_a \begin{cases} P_{4a} = 10 \text{ kPa} \\ h_{4a} = 2251,45 \text{ kJ/kg} \\ \text{liquide-vapeur} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s_{4a} = 7,1066 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$

$$\Delta s = s_{4a} - s_3 = 0,335 \text{ kJ/kg} > 0$$

*Pompe :*

$$w_{Pa} = \frac{w_{Ps}}{\eta_P} = \frac{-4,03}{0,9} = -4,48 \text{ kJ/kg}$$

$$h_1 - h_{2a} = -4,48 \text{ kJ/kg} \quad \Rightarrow \quad h_{2a} = 196,29 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{État } 2_a \begin{cases} P_{2a} = 4 \text{ MPa} \\ h_{2a} = 2251,45 \text{ kJ/kg} \\ \text{liquide comprimé} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s_{1a} = 0,6506 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$

$$\Delta s = s_{2a} - s_1 = 0,0014 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} > 0$$

*Chaleur :*

$$q_H = q_{2-3a} = h_3 - h_{2a} = 3018,08 \text{ kJ/kg}$$

*Travail net :*

$$w_{net} = w_{Ta} + w_{Pa} = 958,89 \text{ kJ/kg}$$

*Rendement :*

$$\eta_{th} = \frac{w_{net}}{q_H} = 0,318$$

Remarquons le rendement du cycle a été diminué 3,5% du fait de l'irréversibilité lors des passages dans la pompe et, surtout, dans la turbine.

## 4.7 Cycles de puissance à gaz et moteurs à combustion interne

Souvent, la substance qui effectue le cycle producteur de travail (le fluide moteur) reste à l'état gazeux pendant tout le cycle. Dans certains cas le système garde son identité tout le temps du fonctionnement de l'appareil : ce sont les mêmes kilogrammes d'air, par exemple, qui parcourent à chaque fois le cycle thermodynamique. Certains auteurs parlent dans ce cas de *cycle fermé*. À l'opposé, certains appareils changent de système pour chaque parcours du cycle. Le fonctionnement de l'appareil comporte alors une phase *d'admission* et une phase *d'échappement*. C'est en particulier le cas des moteurs à *combustion interne* et on utilisera le terme de *cycle ouvert* dans cette situation.

Les moteurs à combustion externe et interne se distinguent par la façon dont la chaleur est produite et communiquée au système. Dans le cas des moteurs à combustion externe, la chaleur provient d'une source extérieure au système et lui est transmise par le biais d'échangeurs de chaleurs, par exemple. Cette source de chaleur peut être géothermique, une chaudière au sein laquelle on brûle du carburant ou du bois, un réacteur nucléaire, etc. Les moteurs à combustion interne sont caractérisés par un apport de chaleur provenant d'un carburant ajouté au système, carburant qui en se consumant fournit l'énergie. Comme ce carburant doit être ajouté à chaque cycle thermodynamique, cela implique qu'il soit incorporé au système à un certain moment de chaque cycle effectué par la machine. L'air, qui joue souvent dans ce cas le rôle de système, se trouve alors contaminé de produits de combustion et doit aussi être évacué (échappement) pour être remplacé au début du cycle thermodynamique suivant (admission); voici un exemple de cycle ouvert.

### 4.7.1 Quelques éléments sur les moteurs à combustion interne

Le moteur d'une voiture ou le moteur à hélice d'un avion convertit le mouvement de va-et-vient d'un piston en un mouvement rotatif du vilebrequin par l'intermédiaire de la bielle; ce type de moteur est désigné sous le vocable de *moteur à mouvement alternatif*. La figure qui suit représente de façon schématique les éléments principaux du moteur à quatre temps à allumage commandé.

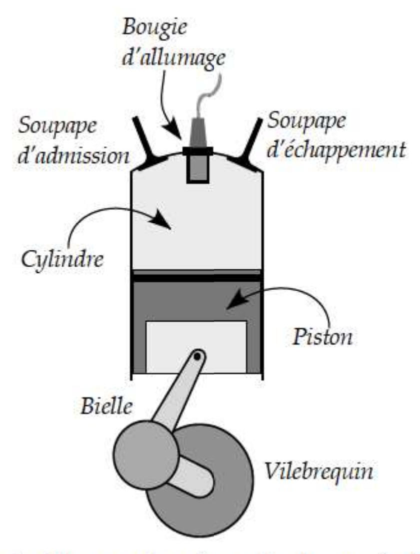



**Figure 4.18** Éléments d'un moteur à quatre temps à allumage commandé

*Quelques définitions*

Le point le plus haut atteint par le piston dans sa course est dénommé *point mort haut* (PMH) et le volume alors délimité dans le cylindre correspond à sa valeur minimale $V_{PMH}$. De façon analogue, le point le plus bas est appelé *point mort bas* (PMB) délimitant le volume $V_{PMB}$. La *cylindrée* correspond à la différence de ces deux volumes et la *course*, à la distance parcourue par le piston ente le PMB et le PMH. On définit aussi le rapport de compression $r$ :

$$r = \frac{V_{\text{PMB}}}{V_{\text{PMH}}} \tag{4-16}$$

*Les quatre temps du moteur à quatre temps*

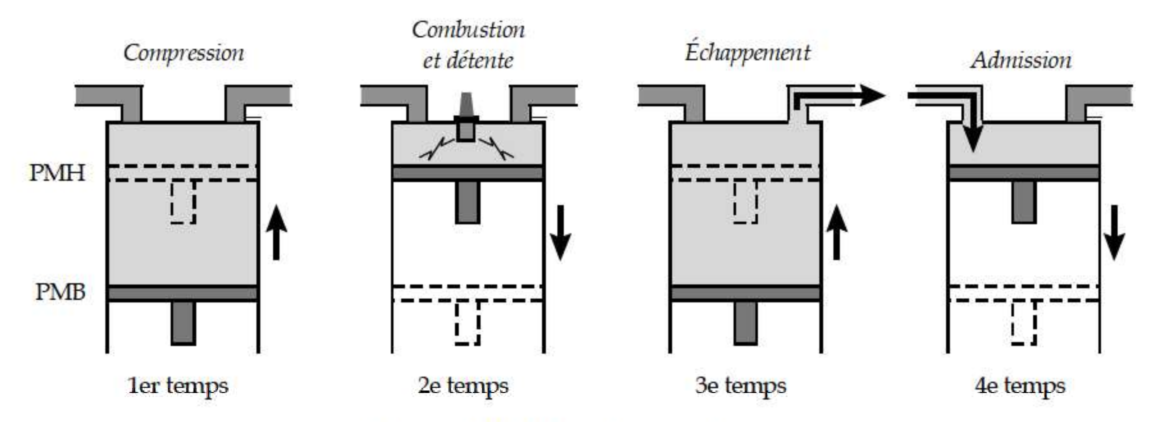



**Figure 4.19 Moteur à quatre temps**

La figure 4.19 illustre le cycle mécanique d'un piston dans un moteur à quatre temps à allumage commandé. Au début du premier temps, le piston est au PMB et le volume est occupé par le mélange air-essence. Juste avant que le piston n'atteigne le PMH, la bougie d'allumage produit une étincelle qui enflamme le carburant (l'essence) et produit une explosion qui repousse le piston vers le PMB; c'est le deuxième temps. Au cours du troisième temps, la soupape d'échappement étant ouverte, le piston revient vers le PMH pour expulser les produits de combustion vers l'extérieur. Lorsque que le piston atteint le PMH, c'est la soupape d'admission qui s'ouvre afin de permettre au mélange air-essence d'être aspiré dans le cylindre lors du déplacement du piston vers le PMB; c'est la phase d'admission.

Deux éléments méritent d'être signalés à ce stade. Le cycle mécanique du piston correspond à deux va-et-vient de celui-ci, ou exprimé autrement, à deux rotations du vilebrequin. De ce fait le nombre de tours par minute (TPM ou RPM) que l'on voit affiché sur le tableau de bord spécifie le *double* de cycles par minute effectué par le piston. Autre élément pertinent à mentionner est le fait que du travail n'est produit que durant un seul des quatre temps : la phase de détente (le deuxième temps de la figure 4.19). C'est une raison pour laquelle, les moteurs que l'on rencontre comportent plusieurs cylindres fonctionnant de concert. À titre d'exemple, dans un moteur comportant quatre cylindres, chaque cylindre se retrouve dans une phase différente du cycle mécanique. En plus de d'étaler de façon plus régulière la production de travail, cette façon de faire présente l'avantage de requérir des pistons et des cylindres moins volumineux et une vitesse du piston moins grande que dans le cas d'un moteur à un seul piston produisant la même puissance.

La figure 4.20 illustre un diagramme *P–V* représentatif d'un moteur à quatre temps.

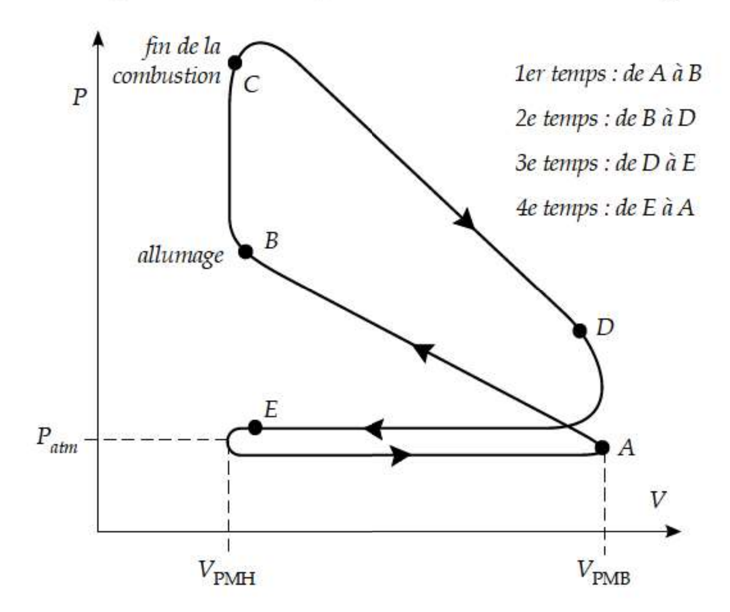



**Figure 4.20** Diagramme *P-V* d'un moteur à quatre temps

Observons que puisque la combustion est très rapide (de *B* à *C*), le volume ne change pratiquement pas, l'inertie du dispositif contraignant le déplacement du piston. Du point de vue thermodynamique, c'est durant cette période que se fait l'absorption de chaleur alors que c'est lors de la phase de l'échappement que de la chaleur est cédée à l'environnement.

### 4.7.2 Le cycle d'Otto ou de Beau de Rochas

Le premier moteur à allumage commandé a été conçu, puis réalisé en 1860 par l'inventeur belge (naturalisé français) Étienne Lenoir. Il s'agissait d'un moteur à deux temps employant le gaz de houille comme carburant et Lenoir en équipa en 1861 le premier bateau à vapeur à naviguer la Seine. En 1862, l'ingénieur français Alphonse Beau (connu comme Beau de Rochas) décrivit de façon théorique le fonctionnement d'un moteur à quatre temps. Au même moment, l'allemand Nikolaus Otto découvre lui aussi le principe du moteur à quatre temps et développe un prototype. En 1886, on réalisa que Beau de Rochas l'avait précédé quelque peu dans le dépôt de son brevet et on invalida celui d'Otto. Malgré ce fait, la littérature présente le plus souvent le cycle thermodynamique qui est le sujet de cette section comme le cycle d'Otto; par souci de conformité, c'est la nomenclature que nous emploierons.

Afin de définir un cycle thermodynamique qui puisse modéliser le comportement d'un moteur, certaines hypothèses doivent être faites. Elles s'appliquent, bien sûr, aux cycles d'Otto et de Diesel dont nous allons discuter, mais aussi aux autres cycles de puissance à gaz que l'on retrouve dans ailleurs (cycles de Stirling, d'Ericsson, de Brayon, etc.).

Au sens strict, ce n'est pas le "même air" qui effectue tous les cycles. En effet, l'air est évacué avec le carburant consumé lors de la phase d'échappement pour être réintroduit durant la phase d'admission. Ces considérations conditionnent et expliquent les hypothèses 1 et 2 à la suite.

i) On travaille avec un système au sens que cela a été défini précédemment c'est-à-dire qu'une masse d'air fixe constitue le système (fluide moteur). Il n'y a donc pas de phases d'admission et d'échappement.

ii) La combustion et l'échappement sont modélisés comme des échanges de chaleur avec l'environnement.

iii) Les évolutions sont considérées réversibles

iv) Les chaleurs spécifiques $C_V$ et $C_P$ sont considérées constantes et on utilise les valeurs qu'elles prennent à 25 °C.

Le cycle d'Otto représenté à la suite (figure 4.21) comporte deux évolutions isochores et deux évolutions isentropiques. Souvent, afin de modéliser les phases d'admission et d'échappement, l'évolution *A*-1 (ou 1-A) est ajoutée au diagramme *P*-*V* mais n'est pas considérée pour les fins des calculs.

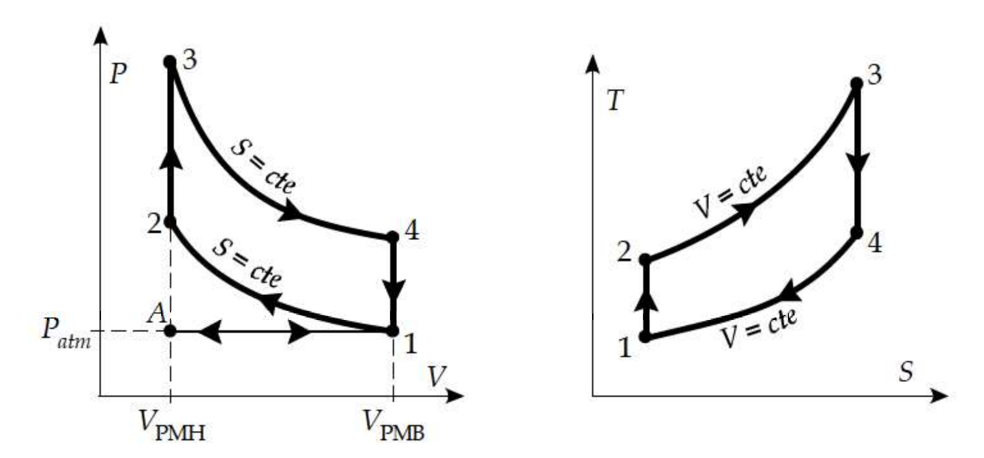



**Figure 4.21** Diagrammes *P*-*V* et *T*-*S* du cycle d'Otto

On observe que les évolutions ne correspondent pas tout à fait aux quatre temps du moteur que nous avons décrits plus haut. Le temps de compression du mélange air-essence (temps 1) est représenté par l'évolution isentropique 1-2. Toutefois, le 2e temps est modélisé par deux évolutions. L'évolution isochore 2-3 représente la portion de la combustion du 2e temps et l'évolution isentropique 3-4, sa portion de détente. Alors qu'en réalité dans le moteur, le rejet de chaleur vers l'extérieur se fait en expulsant les produits de combustion (échappement), dans le cycle d'Otto il se fait lors de l'évolution isochore 4-1.

Le rapport de compression défini à l'équation (4-16) devient ici :

$$r = \frac{V_{\text{PMB}}}{V_{\text{PMH}}} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3} \tag{4-17}$$

Considérons les différentes évolutions.

*i)* évolution 1-2: $S = cte$ alors, $Q_{1-2} = 0$ et $PV^k = cte$

$$W_{1-2} = mR\frac{(T_2 - T_1)}{1-k}$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-k}=r^{1-k} \quad (4\text{-}18)$$

*ii)* évolution 2-3: $V = cte$ alors

$$W_{2-3}=0$$

$$Q_{2-3}=mC_V\left(T_3-T_2\right)=Q_H \quad (4\text{-}19)$$

*iii)* évolution 3-4: $S = cte$ alors,

$$Q_{3-4}=0 \text{ et } PV^k=cte$$

$$W_{3-4}=mR\frac{\left(T_4-T_3\right)}{1-k}$$

$$\frac{T_4}{T_3}=\left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{1-k}=r^{1-k} \quad (4\text{-}20)$$

*iv)* évolution 4-1: $V = cte$ alors

$$W_{4-1}=0$$

$$Q_{4-1}=mC_V\left(T_1-T_4\right)=-Q_B \quad (4\text{-}21)$$

*Calcul du rendement thermique*

En comparant les équations (4-18) et (4-20), on observe qu'on peut écrire:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_4}{T_3}$$

et donc:

$$\frac{T_4}{T_1}=\frac{T_3}{T_2} \quad (4\text{-}22)$$

Par ailleurs, le rendement thermique s'écrit:

$$\eta=1-\frac{Q_B}{Q_H}=1-\frac{mC_V\left(T_4-T_1\right)}{mC_V\left(T_3-T_2\right)}$$

$$\eta=1-\left(\frac{T_1}{T_2}\right)\left(\frac{T_4/T_1-1}{T_3/T_2-1}\right)$$

du fait du résultat (4-22) ainsi que de (4-18), il vient:

$$\eta=1-\frac{T_1}{T_2}=1-r^{1-k} \quad (4\text{-}23)$$

On constate un résultat assez surprenant: le rendement de ce cycle ne dépend que du rapport de compression $r$. Les températures minimale et maximale n'interviennent pas dans le résultat, ce qui est assez inusité. Elles affectent la grandeur du travail net.

**Exemple 4.8 :** Un cycle d'Otto idéal a un rapport de compression de 8. Au début de l'évolution de compression, l'air est à 100 kPa et 300 K. La chaleur massique transmise durant l'évolution de chauffage isochore est de 1000 kJ/kg.

a) Calculez les températures et pression pour chaque état.
b) Calculez les travaux et chaleurs massiques et vérifiez que le rendement correspond bien au résultat (4-23).

*Solution*

Ce cycle est représenté à la figure 4.21 avec :

$$P_1 = 100 \text{ kPa} \ ; \ T_1 = 300 \text{ K} \ ; \ r = \frac{V_1}{V_2} = 8 \ ; \ q_{2-3} = 1000 \text{ kJ/kg} \ \text{ et}$$
$$R = 0{,}287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \ ; \ C_V = 0{,}7165 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \ ; \ k = 1{,}4$$

a) 1-2: *Compression isentropique* $P_1 V_1^k = P_2 V_2^k$

$$q_{1-2} = 0$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-k} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-0,4} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 689{,}2 \text{ K}$$
$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = P_1 r^k \quad \Rightarrow \quad P_2 = 1{,}838 \text{ MPa}$$
$$w_{1-2} = \frac{R(T_2 - T_1)}{1-k} = -279{,}3 \text{ kJ/kg}$$

2-3: *Chauffage isochore*

$$w_{2-3} = 0$$
$$q_{2-3} = C_V (T_3 - T_2) = 1000 \text{ kJ/kg} \quad \Rightarrow \quad T_3 = 2084{,}9 \text{ K}$$
$$\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3} \quad \Rightarrow \quad P_3 = P_2 \left(\frac{T_3}{T_2}\right) = 5{,}560 \text{ MPa}$$

3-4: *Détente isentropique* $P_3 V_3^k = P_4 V_4^k$

$$q_{3-4} = 0$$
$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{1-k} = r^{-0,4} \quad \Rightarrow \quad T_4 = 907{,}5 \text{ K}$$
$$\frac{P_4 V_4}{T_4} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad P_4 = P_1 \left(\frac{T_4}{T_1}\right) = 302{,}5 \text{ kPa}$$
$$w_{3-4} = \frac{R(T_4 - T_3)}{1-k} = 844{,}8 \text{ kJ/kg}$$

4-1: *Refroidissement isochore*

$$w_{4-1} = 0$$
$$q_{4-1} = C_V (T_1 - T_4) = -435{,}3 \text{ kJ/kg}$$

b) *Travail net*

$$w_{net} = w_{1-2} + w_{2-3} = 565{,}5 \text{ kJ/kg}$$

*Rendement*

$$q_H = q_{2-3} = 1000 \text{ kJ/kg}$$
$$q_B = |q_{4-1}| = 435{,}3 \text{ kJ/kg}$$

$$\eta = \frac{w_{net}}{q_H} = 1 - \frac{q_B}{q_H} = 0{,}565$$

On vérifie qu'on retrouve le même résultat à l'aide de (4-23), en effet:

$$\eta = 1 - r^{1-k} = 1 - 8^{-0{,}4} = 0{,}565$$

Comme il l'a été mentionné plus haut, le rendement de ce cycle est déterminé par le rapport de compression. La figure qui suit illustre ce fait.

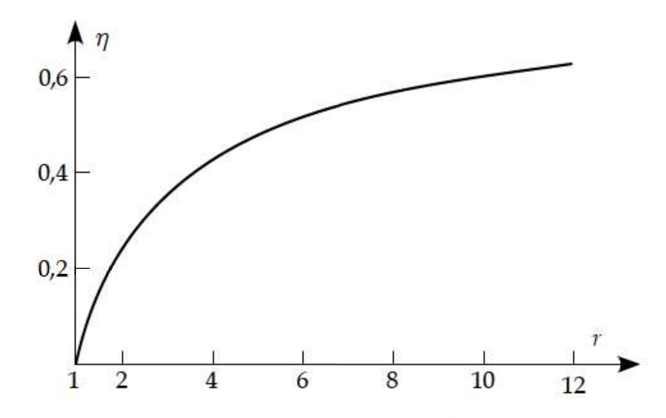



**Figure 4.22** Rendement thermique du cycle d'Otto avec de l'air pour système

On a évidemment cherché à hausser ce rapport autant que faire se peut mais on se bute à une difficulté incontournable: l'*auto-allumage* ou *allumage spontané*. Au-delà d'une certaine température quand le piston s'approche du PMH, le mélange s'enflamme spontanément sans que la bougie n'ait à intervenir. Cet allumage incontrôlé endommage le moteur et doit être empêché. Une façon de contourner la difficulté a été de hausser l'indice d'octane de l'essence employée. Malgré cela (ainsi que l'ajout d'injecteurs dont nous discuterons plus avant), il est rare que l'on rencontre des rapports de compression au-delà de 10 à 12 pour les moteurs à allumage commandé.

### 4.7.3 Cycle de Diesel

Une façon de contourner le problème de combustion incontrôlée tout en travaillant avec un rapport de compression élevé, est d'ajouter le carburant au moment que l'on veuille que la combustion s'effectue. Si la température au moment d'atteindre le PMH est assez élevée, le carburant s'enflammera spontanément, rendant ainsi inutile l'intervention de la bougie. Rudolf Diesel développa en 1897 le premier prototype du moteur qui porte désormais son nom. Ainsi, la bougie d'allumage est remplacée par un injecteur qui ajoute le carburant au moment voulu, c'est-

à-dire quand le piston atteint le PMH. Du point de vue thermodynamique, le cycle de Diesel peut être envisagé comme une modification du cycle d'Otto où l'absorption de chaleur se faisant à volume constant est remplacée par une évolution à pression constante. La figure 4.23 illustre cette idée.

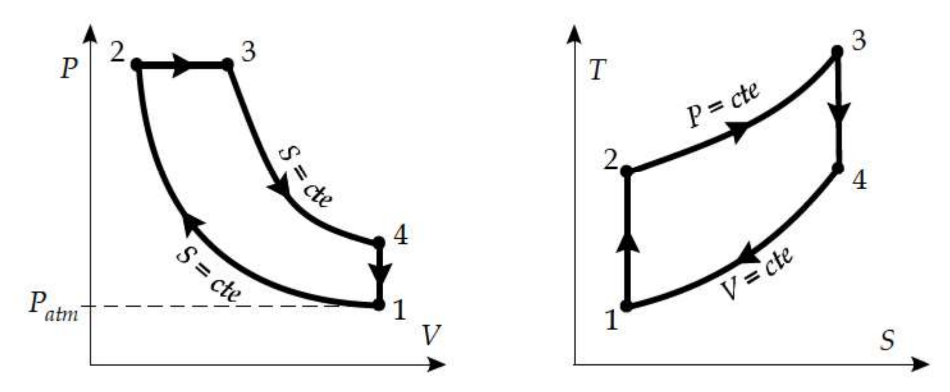



**Figure 4.23** Diagrammes *P-V* et *T-S* du cycle de Diesel

Comme la figure 4.23, le montre le cycle comporte deux évolutions isentropiques (1-2 et 3-4) et une évolution isobare au cours de laquelle $Q_H$ est absorbée (2-3) et finalement, une évolution isochore durant laquelle $Q_B$ est rejetée (4-1). Notons qu'ici, le rapport de compression se définit par:

$$r = \frac{V_{\text{PMB}}}{V_{\text{PMH}}} = \frac{V_1}{V_2} \qquad \text{(puisque } V_3 \neq V_2\text{)} \qquad (4\text{-}24)$$

On juge utile de définir $r_c$, le rapport des volumes avant et après la combustion, c'est-à-dire:

$$r_c = \frac{V_3}{V_2} \qquad (4\text{-}25)$$

Ici, en contraste avec le cycle d'Otto, du travail est produit durant trois des quatre évolutions, voyons cela de façon plus détaillée.

*i)* évolution 1-2: $S = cte$ alors,

$$Q_{1-2} = 0 \text{ et } PV^k = cte$$

$$W_{1-2} = mR\frac{(T_2 - T_1)}{1-k}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-k} = r^{1-k} \qquad (4\text{-}26)$$

et:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} \qquad (4\text{-}27)$$

*ii)* évolution 2-3: $P = cte$ alors

$$W_{2-3} = P_2(V_3 - V_2) = mR(T_3 - T_2)$$

$$Q_{2-3} = mC_P(T_3 - T_2) = Q_H \qquad (4\text{-}28)$$

*iii)* évolution 3-4: $S = cte$ alors,

$$Q_{3-4} = 0 \text{ et } PV^k = cte$$

$$W_{3-4} = mR\frac{(T_4 - T_3)}{1-k}$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{4-29}$$

*iv)* évolution 4-1: $V = cte$ alors $W_{4-1} = 0$

$$Q_{4-1} = mC_V(T_1 - T_4) = -Q_B \tag{4-30}$$

*Calcul du rendement thermique*

$$\eta = 1 - \frac{Q_B}{Q_H} = 1 - \frac{mC_P(T_4 - T_1)}{mC_V(T_3 - T_2)}$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)\left(\frac{C_V}{C_P}\right)\left(\frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1}\right)$$

$$\eta = 1 - r^{1-k}\left(\frac{1}{k}\right)\left[\frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1}\right] \tag{4-31}$$

En écrivant la loi des gaz parfaits dans le cas des évolutions 2-3 et 4-1, il vient:

$$\frac{P_3V_3}{T_3} = \frac{P_2V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = r_c \tag{4-32}$$

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_4V_4}{T_4} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_4}{T_1} = \frac{P_4}{P_1} \tag{4-33}$$

En faisant le rapport des équations (4-27) et (4-29), on trouve (puisque $P_2 = P_3$),

$$\left(\frac{T_4}{T_1}\right)\left(\frac{T_2}{T_3}\right) = \left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Faisant usage de (4-32) et de (4-33),

$$\frac{T_4}{T_1} = r_c^k \tag{4-34}$$

Finalement, insérant (4-32) et (4-34) dans (4-31), on trouve pour le rendement:

$$\eta = 1 - r^{1-k}\left(\frac{r_c^k - 1}{k(r_c - 1)}\right) \tag{4-35}$$

**Exemple 4.9 :** Un cycle de Diesel idéal a un rapport de compression de 18. Au début de l'évolution de compression, l'air est à 100 kPa et 300 K. La chaleur massique transmise durant l'évolution de chauffage isobare est de 1000 kJ/kg.

a) Calculez les températures et pression aux différents points ce cycle.
b) Calculez les travaux et chaleurs massiques et vérifiez que le rendement correspond bien au résultat (4-35).

*Solution*

Ce cycle est représenté à la figure 4.23 avec :

$$P_1 = 100 \text{ kPa} \;;\; T_1 = 300 \text{ K} \;;\; r = \frac{V_1}{V_2} = 18 \;;\; q_{2-3} = 1000 \text{ kJ/kg} \text{ et}$$
$$R = 0{,}287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \;;\; C_V = 0{,}7165 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \;;\; k = 1{,}4$$

a) 1-2: *Compression isentropique* $P_1V_1^k = P_2V_2^k$

$$q_{1-2} = 0$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-k} = \left(\frac{1}{18}\right)^{-0,4} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 953{,}3 \text{ K}$$
$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = P_1 r^k \quad \Rightarrow \quad P_2 = 5{,}720 \text{ MPa}$$
$$w_{1-2} = \frac{R(T_2 - T_1)}{1-k} = -468{,}7 \text{ kJ/kg}$$

2-3: *Chauffage isobare*

$$P_3 = P_2 = 5{,}720 \text{ MPa}$$
$$w_{2-3} = P_2(v_3 - v_2) = R(T_3 - T_2) = 286{,}0 \text{ kJ}$$
$$q_{2-3} = C_P(T_3 - T_2) = 1000 \text{ kJ/kg} \quad \Rightarrow \quad T_3 = 1949{,}8 \text{ K}$$
$$r_c = \frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2} = 2{,}045$$

3-4: *Détente isentropique* $P_3V_3^k = P_4V_4^k$

$$q_{3-4} = 0$$
$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{1-k} = r^{-0,4} \quad \Rightarrow \quad T_4 = 816{,}9\text{K}$$
$$w_{3-4} = \frac{R(T_4 - T_3)}{1-k} = 812{,}8 \text{ kJ/kg}$$

4-1: *Refroidissement isochore*

$$w_{4-1} = 0$$
$$q_{4-1} = C_V(T_1 - T_4) = -370{,}4 \text{ kJ/kg}$$

b) *Travail net* $w_{net} = w_{1-2} + w_{2-3} + w_{3-4} = 630,1 \text{ kJ/kg}$

ou, encore: $q_H = q_{2-3} = 1000 \text{ kJ/kg}$

$q_B = |q_{4-1}| = 370,4 \text{ kJ/kg}$

et $w_{net} = q_H - q_B$

*Rendement* $\eta = \dfrac{w_{net}}{q_H} = 1 - \dfrac{q_B}{q_H} = 0,630$

On vérifie qu'on retrouve le même résultat à l'aide de (4-35), en effet:

$$\eta = 1 - r^{1-k}\left(\frac{r_c^k - 1}{k(r_c - 1)}\right) = 1 - 18^{-0,4}\left(\frac{2,045^{1,4} - 1}{1,4(2,045 - 1)}\right) = 0,63$$

En comparant cet exemple avec l'exemple 4.8, on observe que pour les mêmes conditions de départ (état 1) et pour le même apport en chaleur, le rendement, et donc le travail net, est plus important. Il est plutôt rare toutefois, qu'on puisse effectuer ce genre de comparaison, les conditions d'opération des deux cycles se démarquant de façon appréciable la plupart du temps. Le moteur Diesel est intéressant en ce que le rapport de compression peut être particulièrement élevé; des valeurs de plus de 20 ne sont pas rares. Par ailleurs, le carburant employé tend à s'enflammer plus facilement que l'essence (qui requiert un processus de raffinage plus élaboré) permettant une combustion plus complète. Les températures et pressions sont souvent très importantes nécessitant de ce fait un moteur dont la construction est plus robuste que pour les moteurs fonctionnant selon le cycle d'Otto. Cette robustesse accrue fait en sorte que les moteurs Diesel sont souvent plus encombrants et plus lourds que leurs pendants fonctionnant selon le cycle d'Otto. Ces derniers équiperont donc typiquement des véhicules relativement légers (motos, voitures, par exemple) alors que les moteurs Diesel seront souvent employés pour les modes de transport plus lourds (bateaux, trains et camions, par exemple). Avec l'apparition des moteurs à injection et l'introduction d'ordinateurs pour contrôler la qualité du mélange air-essence ainsi que l'allumage, la frontière entre les deux designs tend à s'estomper.

## 4.8 EXERCICES

**Problème 1** Soit un cycle de Rankine de base alimenté par l'énergie solaire et utilisant l'eau comme fluide moteur. De la vapeur saturée sort du capteur solaire à 150 °C et la pression au condenseur est de 10 kPa. Calculez le rendement thermique de ce cycle.

Rép. : $\eta = 0,23$

**Problème 2** On désire étudier l'effet de la pression à l'échappement de la turbine sur la performance d'un cycle de Rankine avec surchauffe à vapeur d'eau. La vapeur entre dans la turbine à 3,5 MPa et 350 °C.

a) Calculez le rendement thermique du cycle et le titre de l'eau à la sortie de la turbine pour des pressions à l'échappement de 5 kPa, 10 kPa, 50 kPa et 100 kPa.
b) Tracez un graphique du rendement thermique en fonction de la pression à l'échappement de la turbine pour la pression et la température d'entrée données.

Rép. : *i)* Pour $P_4$ = 5 kPa : $\eta$ = 0,36 et $x_4$ = 0,781
*ii)* Pour $P_4$ = 10 kPa : $\eta$ = 0,34 et $x_4$ = 0,801
*iii)* Pour $P_4$ = 50 kPa : $\eta$ = 0,285 et $x_4$ = 0,856
*iv)* Pour $P_4$ = 100 kPa : $\eta$ = 0,256 et $x_4$ = 0,884

**Problème 3** Soit un cycle à resurchauffe idéal dans lequel la vapeur d'eau entre dans la turbine à haute pression à 3,5 MPa et 350 °C pour s'y détendre jusqu'à 0,8 MPa. On la resurchauffe ensuite jusqu'à 350 °C, puis on la détend jusqu'à 10 kPa dans la turbine à basse pression. Calculez le rendement thermique du cycle et le titre de la substance à la sortie de la turbine à basse pression.

Rép. : $\eta = 0,347\,; x_6 = 0,901$

**Problème 4** On désire étudier l'influence du nombre d'étages de resurchauffe dans un cycle à resurchauffe idéal utilisant la vapeur d'eau. Recommencez le problème no 3 en employant deux étages de resurchauffe à 350°C l'un à 1,2 MPa et l'autre à 0,2 MPa, au lieu de l'étage unique à 0,8 MPa.

Rép. : $\eta = 0,352\,; x_8 = 0,988$

**Problème 5** On désire étudier l'influence du nombre de réchauffeurs d'eau d'alimentation à mélange sur le rendement thermique d'un cycle idéal où la vapeur d'eau sort du générateur de vapeur à 20 MPa et 600 °C et où la pression au condenseur est de 10 kPa. Calculez le rendement thermique pour chacun des cas suivants :

a) il n'y a pas de réchauffeur d'eau d'alimentation ;
b) il y a un réchauffeur d'eau d'alimentation fonctionnant à 1,0 MPa ;
c) il y a deux réchauffeurs d'eau, l'un fonctionnant à 3,0 MPa et l'autre à 0,2 MPa.

Rép. : a) $\eta = 0,438$
b) $\eta = 0,473$
c) $\eta = 0,488$

**Problème 6** Soit un cycle combiné idéal à resurchauffe et à régénération utilisant de la vapeur d'eau comme fluide moteur. La vapeur entre dans la turbine à haute pression à 3,5 MPa et 350 °C et une partie en est extraite à 0,8 MPa pour alimenter un réchauffeur d'eau d'alimentation. La vapeur qui reste est resurchauffée à cette pression jusqu'à 350 °C et dirigée vers la turbine à basse pression d'où on en extrait une partie à 0,2 MPa pour alimenter un autre réchauffeur d'eau d'alimentation. La pression au condenseur est de 10 kPa.

Calculez le travail massique net et le rendement thermique du cycle.

Rép. : $w_{net} = 1021$ kJ/kg ; $\eta = 0,373$

**Problème 7** Remplacez la valve d'expansion de l'exemple 4.5 par une turbine isentropique.

a) Quelle est la puissance développée par la turbine ?
b) Quel est le nouveau coefficient de performance du cycle ?

Rép. : a) $\dot{W}_T = 0,325$ kW b) $\beta = 5,05$

**Problème 8** On utilise un cycle de réfrigération de Rankine à compression de vapeur avec du R134a pour climatiser une maison l'été. Le milieu extérieur est à 40 °C et on cherche à maintenir la température intérieure à 20 °C. Si le débit massique, la température du fluide dans l'évaporateur et la pression dans le condenseur sont respectivement de 0,008 kg/s, 8 °C et 1,4 MPa, calculez

a) la capacité de réfrigération $\dot{Q}_B$ du cycle en ton (1 ton = 211 kJ/min),
b) le titre du fluide à l'entrée de l'évaporateur,
c) le coefficient de performance du cycle.

Rép. : a) $\dot{Q}_B = 0,288$ ton
b) $x_4 = 0,338$
c) $\beta = 4,77$

**Problème 9** Un moteur à allumage commandé de 2 L de cylindrée à quatre pistons présente un rapport de compression de 8,5. Après admission (au début de la phase de compression), l'air est à 288 K et 100 kPa. La température maximale atteinte par l'air est de 2300 K.

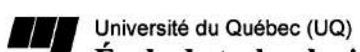
a) Établissez les volumes au PMB et au PMH.
b) Établissez les pression et température à chaque point du cycle.
c) Calculez le travail net par cycle ainsi que la puissance (théorique) du moteur s'il fonctionne à 3000 RPM.

a) $V_{PMB} = 5{,}67 \times 10^{-4}\ \text{kg/m}^3$ ; $V_{PMH} = 6{,}67 \times 10^{-5}\ \text{kg/m}^3$
b) $P_1 = 100\ \text{kPa}$ ; $T_1 = 288\ \text{K}$
$P_2 = 2{,}00\ \text{MPa}$ ; $T_2 = 667{,}9\ \text{K}$
$P_3 = 6{,}788\ \text{MPa}$ ; $T_3 = 2300\ \text{K}$
$P_4 = 222{,}7\ \text{kPa}$ ; $T_4 = 668{,}0\ \text{K}$
c) $W_{net} = 1{,}833\ \text{kJ}$ ; $\dot{W}_{net} = 45{,}8\ \text{kW}$

**Problème 10** Un moteur diesel de 2,1 L de cylindrée à quatre pistons présente un rapport de compression de 22. Après admission (au début de la phase de compression), l'air est à 300 K et 100 kPa. La température maximale atteinte par l'air est de 2300 K.

a) Établissez les volumes au PMB et au PMH.
b) Établissez les pression et température à chaque point du cycle.
c) Calculez le travail net par cycle ainsi que la puissance (théorique) du moteur s'il fonctionne à 3000 RPM.

a) $V_{PMB} = 5{,}5 \times 10^{-4}\ \text{kg/m}^3$ ; $V_{PMH} = 2{,}5 \times 10^{-5}\ \text{kg/m}^3$
b) $P_1 = 100\ \text{kPa}$ ; $T_1 = 300\ \text{K}$
$P_2 = 7{,}575\ \text{MPa}$ ; $T_2 = 1033\ \text{K}$
$P_3 = 7{,}575\ \text{MPa}$ ; $T_3 = 2300\ \text{K}$
$P_4 = 339{,}3\ \text{kPa}$ ; $T_4 = 977{,}1\ \text{K}$
c) $W_{net} = 2{,}575\ \text{kJ}$ ; $\dot{W}_{net} = 64{,}4\ \text{kW}$



Université du Québec (UQ)
**École de technologie supérieure**
Service des enseignements généraux
Local B2500 - 396-8938
Site internet : http://www.etsmtl.ca/index/htm

# ING-160

# THERMODYNAMIQUE ET MÉCANIQUE DES FLUIDES

# TABLES DE THERMODYNAMIQUE

**Révisé en mai 2006**

**TABLE A.1**

**Variables thermodynamiques de la vapeur d'eau**[a]

**TABLE A.1.1**

**Vapeur saturée: table de la température**

| | | Volume massique m³/kg | | Énergie interne kJ/kg | | | Enthalpie kJ/kg | | | Entropie kJ/kg·K | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temp. °C $T$ | Pres. kPa $P$ | Liquide sat. $v_f$ | Vapeur sat. $v_g$ | Liquide sat. $u_f$ | Évap. $u_{fg}$ | Vapeur sat. $u_g$ | Liquide sat. $h_f$ | Évap. $h_{fg}$ | Vapeur sat. $h_g$ | Liquide sat. $s_f$ | Évap. $s_{fg}$ | Vapeur sat. $s_g$ |
| 0.01 | 0.6113 | 0.001 000 | 206.14 | .00 | 2375.3 | 2375.3 | .01 | 2501.3 | 2501.4 | .0000 | 9.1562 | 9.1562 |
| 5 | 0.8721 | 0.001 000 | 147.12 | 20.97 | 2361.3 | 2382.3 | 20.98 | 2489.6 | 2510.6 | .0761 | 8.9496 | 9.0257 |
| 10 | 1.2276 | 0.001 000 | 106.38 | 42.00 | 2347.2 | 2389.2 | 42.01 | 2477.7 | 2519.8 | .1510 | 8.7498 | 8.9008 |
| 15 | 1.7051 | 0.001 001 | 77.93 | 62.99 | 2333.1 | 2396.1 | 62.99 | 2465.9 | 2528.9 | .2245 | 8.5569 | 8.7814 |
| 20 | 2.339 | 0.001 002 | 57.79 | 83.95 | 2319.0 | 2402.9 | 83.96 | 2454.1 | 2538.1 | .2966 | 8.3706 | 8.6672 |
| 25 | 3.169 | 0.001 003 | 43.36 | 104.88 | 2304.9 | 2409.8 | 104.89 | 2442.3 | 2547.2 | .3674 | 8.1905 | 8.5580 |
| 30 | 4.246 | 0.001 004 | 32.89 | 125.78 | 2290.8 | 2416.6 | 125.79 | 2430.5 | 2556.3 | .4369 | 8.0164 | 8.4533 |
| 35 | 5.628 | 0.001 006 | 25.22 | 146.67 | 2276.7 | 2423.4 | 146.68 | 2418.6 | 2565.3 | .5053 | 7.8478 | 8.3531 |
| 40 | 7.384 | 0.001 008 | 19.52 | 167.56 | 2262.6 | 2430.1 | 167.57 | 2406.7 | 2574.3 | .5725 | 7.6845 | 8.2570 |
| 45 | 9.593 | 0.001 010 | 15.26 | 188.44 | 2248.4 | 2436.8 | 188.45 | 2394.8 | 2583.2 | .6387 | 7.5261 | 8.1648 |
| 50 | 12.349 | 0.001 012 | 12.03 | 209.32 | 2234.2 | 2443.5 | 209.33 | 2382.7 | 2592.1 | .7038 | 7.3725 | 8.0763 |
| 55 | 15.758 | 0.001 015 | 9.568 | 230.21 | 2219.9 | 2450.1 | 230.23 | 2370.7 | 2600.9 | .7679 | 7.2234 | 7.9913 |
| 60 | 19.940 | 0.001 017 | 7.671 | 251.11 | 2205.5 | 2456.6 | 251.13 | 2358.5 | 2609.6 | .8312 | 7.0784 | 7.9096 |
| 65 | 25.03 | 0.001 020 | 6.197 | 272.02 | 2191.1 | 2463.1 | 272.06 | 2346.2 | 2618.3 | .8935 | 6.9375 | 7.8310 |
| 70 | 31.19 | 0.001 023 | 5.042 | 292.95 | 2176.6 | 2469.6 | 292.98 | 2333.8 | 2626.8 | .9549 | 6.8004 | 7.7553 |
| 75 | 38.58 | 0.001 026 | 4.131 | 313.90 | 2162.0 | 2475.9 | 313.93 | 2321.4 | 2635.3 | 1.0155 | 6.6669 | 7.6824 |
| 80 | 47.39 | 0.001 029 | 3.407 | 334.86 | 2147.4 | 2482.2 | 334.91 | 2308.8 | 2643.7 | 1.0753 | 6.5369 | 7.6122 |
| 85 | 57.83 | 0.001 033 | 2.828 | 355.84 | 2132.6 | 2488.4 | 355.90 | 2296.0 | 2651.9 | 1.1343 | 6.4102 | 7.5445 |
| 90 | 70.14 | 0.001 036 | 2.361 | 376.85 | 2117.7 | 2494.5 | 376.92 | 2283.2 | 2660.1 | 1.1925 | 6.2866 | 7.4791 |
| 95 | 84.55 | 0.001 040 | 1.982 | 397.88 | 2102.7 | 2500.6 | 397.96 | 2270.2 | 2668.1 | 1.2500 | 6.1659 | 7.4159 |

[a] Adaptation de: Joseph H. Keenan, Frederick G. Keyes, Philip G. Hill, et Joan G. Moore, *Steam Tables* (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1978).

**TABLE A.1.1 *(suite)***

**Vapeur saturée: table de la température**

| Temp. °C $T$ | Pres. MPa $P$ | Volume massique $m^3/kg$ Liquide sat. $v_f$ | Vapeur sat. $v_g$ | Énergie interne kJ/kg Liquide sat. $u_f$ | Évap. $u_{fg}$ | Vapeur sat. $u_g$ | Enthalpie kJ/kg Liquide sat. $h_f$ | Évap. $h_{fg}$ | Vapeur sat. $h_f$ | Entropie kJ/kg·K Liquide sat. $s_f$ | Évap. $s_{fg}$ | Vapeur sat. $s_g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 0.101 35 | 0.001 044 | 1.6729 | 418.94 | 2087.6 | 2506.5 | 419.04 | 2257.0 | 2676.1 | 1.3069 | 6.0480 | 7.3549 |
| 105 | 0.120 82 | 0.001 048 | 1.4194 | 440.02 | 2072.3 | 2512.4 | 440.15 | 2243.7 | 2683.8 | 1.3630 | 5.9328 | 7.2958 |
| 110 | 0.143 27 | 0.001 052 | 1.2102 | 461.14 | 2057.0 | 2518.1 | 461.30 | 2230.2 | 2691.5 | 1.4185 | 5.8202 | 7.2387 |
| 115 | 0.169 06 | 0.001 056 | 1.0366 | 482.30 | 2041.4 | 2523.7 | 482.48 | 2216.5 | 2699.0 | 1.4734 | 5.7100 | 7.1833 |
| 120 | 0.198 53 | 0.001 060 | 0.8919 | 503.50 | 2025.8 | 2529.3 | 503.71 | 2202.6 | 2706.3 | 1.5276 | 5.6020 | 7.1296 |
| 125 | 0.2321 | 0.001 065 | 0.7706 | 524.74 | 2009.9 | 2534.6 | 524.99 | 2188.5 | 2713.5 | 1.5813 | 5.4962 | 7.0775 |
| 130 | 0.2701 | 0.001 070 | 0.6685 | 546.02 | 1993.9 | 2539.9 | 546.31 | 2174.2 | 2720.5 | 1.6344 | 5.3925 | 7.0269 |
| 135 | 0.3130 | 0.001 075 | 0.5822 | 567.35 | 1977.7 | 2545.0 | 567.69 | 2159.6 | 2727.3 | 1.6870 | 5.2907 | 6.9777 |
| 140 | 0.3613 | 0.001 080 | 0.5089 | 588.74 | 1961.3 | 2550.0 | 589.13 | 2144.7 | 2733.9 | 1.7391 | 5.1908 | 6.9299 |
| 145 | 0.4154 | 0.001 085 | 0.4463 | 610.18 | 1944.7 | 2554.9 | 610.63 | 2129.6 | 2740.3 | 1.7907 | 5.0926 | 6.8833 |
| 150 | 0.4758 | 0.001 091 | 0.3928 | 631.68 | 1927.9 | 2559.5 | 632.20 | 2114.3 | 2746.5 | 1.8418 | 4.9960 | 6.8379 |
| 155 | 0.5431 | 0.001 096 | 0.3468 | 653.24 | 1910.8 | 2564.1 | 653.84 | 2098.6 | 2752.4 | 1.8925 | 4.9010 | 6.7935 |
| 160 | 0.6178 | 0.001 102 | 0.3071 | 674.87 | 1893.5 | 2568.4 | 675.55 | 2082.6 | 2758.1 | 1.9427 | 4.8075 | 6.7502 |
| 165 | 0.7005 | 0.001 108 | 0.2727 | 696.56 | 1876.0 | 2572.5 | 697.34 | 2066.2 | 2763.5 | 1.9925 | 4.7153 | 6.7078 |
| 170 | 0.7917 | 0.001 114 | 0.2428 | 718.33 | 1858.1 | 2576.5 | 719.21 | 2049.5 | 2768.7 | 2.0419 | 4.6244 | 6.6663 |
| 175 | 0.8920 | 0.001 121 | 0.2168 | 740.17 | 1840.0 | 2580.2 | 741.17 | 2032.4 | 2773.6 | 2.0909 | 4.5347 | 6.6256 |
| 180 | 1.0021 | 0.001 127 | 0.194 05 | 762.09 | 1821.6 | 2583.7 | 763.22 | 2015.0 | 2778.2 | 2.1396 | 4.4461 | 6.5857 |
| 185 | 1.1227 | 0.001 134 | 0.174 09 | 784.10 | 1802.9 | 2587.0 | 785.37 | 1997.1 | 2782.4 | 2.1879 | 4.3586 | 6.5465 |
| 190 | 1.2544 | 0.001 141 | 0.156 54 | 806.19 | 1783.8 | 2590.0 | 807.62 | 1978.8 | 2786.4 | 2.2359 | 4.2720 | 6.5079 |
| 195 | 1.3978 | 0.001 149 | 0.141 05 | 828.37 | 1764.4 | 2592.8 | 829.98 | 1960.0 | 2790.0 | 2.2835 | 4.1863 | 6.4698 |
| 200 | 1.5538 | 0.001 157 | 0.127 36 | 850.65 | 1744.7 | 2595.3 | 852.45 | 1940.7 | 2793.2 | 2.3309 | 4.1014 | 6.4323 |
| 205 | 1.7230 | 0.001 164 | 0.115 21 | 873.04 | 1724.5 | 2597.5 | 875.04 | 1921.0 | 2796.0 | 2.3780 | 4.0172 | 6.3952 |
| 210 | 1.9062 | 0.001 173 | 0.104 41 | 895.53 | 1703.9 | 2599.5 | 897.76 | 1900.7 | 2798.5 | 2.4248 | 3.9337 | 6.3585 |

**TABLE A.1.1 *(suite)***

**Vapeur saturée: table de la température**

| | | Volume massique $m^3/kg$ | | Énergie interne kJ/kg | | | Enthalpie kJ/kg | | | Entropie kJ/kg·K | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temp. °C $T$ | Pres. MPa $P$ | Liquide sat. $v_f$ | Vapeur sat. $v_g$ | Liquide sat. $u_f$ | Évap. $u_{fg}$ | Vapeur sat. $u_g$ | Liquide sat. $h_f$ | Évap. $h_{fg}$ | Vapeur sat. $h_f$ | Liquide sat. $s_f$ | Évap. $s_{fg}$ | Vapeur sat. $s_g$ |
| 215 | 2.104 | 0.001 181 | 0.094 79 | 918.14 | 1682.9 | 2601.1 | 920.62 | 1879.9 | 2800.5 | 2.4714 | 3.8507 | 6.3221 |
| 220 | 2.318 | 0.001 190 | 0.086 19 | 940.87 | 1661.5 | 2602.4 | 943.62 | 1858.5 | 2802.1 | 2.5178 | 3.7683 | 6.2861 |
| 225 | 2.548 | 0.001 199 | 0.078 49 | 963.73 | 1639.6 | 2603.3 | 966.78 | 1836.5 | 2803.3 | 2.5639 | 3.6863 | 6.2503 |
| 230 | 2.795 | 0.001 209 | 0.071 58 | 986.74 | 1617.2 | 2603.9 | 990.12 | 1813.8 | 2804.0 | 2.6099 | 3.6047 | 6.2146 |
| 235 | 3.060 | 0.001 219 | 0.065 37 | 1009.89 | 1594.2 | 2604.1 | 1013.62 | 1790.5 | 2804.2 | 2.6558 | 3.5233 | 6.1791 |
| 240 | 3.344 | 0.001 229 | 0.059 76 | 1033.21 | 1570.8 | 2604.0 | 1037.32 | 1766.5 | 2803.8 | 2.7015 | 3.4422 | 6.1437 |
| 245 | 3.648 | 0.001 240 | 0.054 71 | 1056.71 | 1546.7 | 2603.4 | 1061.23 | 1741.7 | 2803.0 | 2.7472 | 3.3612 | 6.1083 |
| 250 | 3.973 | 0.001 251 | 0.050 13 | 1080.39 | 1522.0 | 2602.4 | 1085.36 | 1716.2 | 2801.5 | 2.7927 | 3.2802 | 6.0730 |
| 255 | 4.319 | 0.001 263 | 0.045 98 | 1104.28 | 1496.7 | 2600.9 | 1109.73 | 1689.8 | 2799.5 | 2.8383 | 3.1992 | 6.0375 |
| 260 | 4.688 | 0.001 276 | 0.042 21 | 1128.39 | 1470.6 | 2599.0 | 1134.37 | 1662.5 | 2796.9 | 2.8838 | 3.1181 | 6.0019 |
| 265 | 5.081 | 0.001 289 | 0.038 77 | 1152.74 | 1443.9 | 2596.6 | 1159.28 | 1634.4 | 2793.6 | 2.9294 | 3.0368 | 5.9662 |
| 270 | 5.499 | 0.001 302 | 0.035 64 | 1177.36 | 1416.3 | 2593.7 | 1184.51 | 1605.2 | 2789.7 | 2.9751 | 2.9551 | 5.9301 |
| 275 | 5.942 | 0.001 317 | 0.032 79 | 1202.25 | 1387.9 | 2590.2 | 1210.07 | 1574.9 | 2785.0 | 3.0208 | 2.8730 | 5.8938 |
| 280 | 6.412 | 0.001 332 | 0.030 17 | 1227.46 | 1358.7 | 2586.1 | 1235.99 | 1543.6 | 2779.6 | 3.0668 | 2.7903 | 5.8571 |
| 285 | 6.909 | 0.001 348 | 0.027 77 | 1253.00 | 1328.4 | 2581.4 | 1262.31 | 1511.0 | 2773.3 | 3.1130 | 2.7070 | 5.8199 |
| 290 | 7.436 | 0.001 366 | 0.025 57 | 1278.92 | 1297.1 | 2576.0 | 1289.07 | 1477.1 | 2766.2 | 3.1594 | 2.6227 | 5.7821 |
| 295 | 7.993 | 0.001 384 | 0.023 54 | 1305.2 | 1264.7 | 2569.9 | 1316.3 | 1441.8 | 2758.1 | 3.2062 | 2.5375 | 5.7437 |
| 300 | 8.581 | 0.001 404 | 0.021 67 | 1332.0 | 1231.0 | 2563.0 | 1344.0 | 1404.9 | 2749.0 | 3.2534 | 2.4511 | 5.7045 |
| 305 | 9.202 | 0.001 425 | 0.019 948 | 1359.3 | 1195.9 | 2555.2 | 1372.4 | 1366.4 | 2738.7 | 3.3010 | 2.3633 | 5.6643 |
| 310 | 9.856 | 0.001 447 | 0.018 350 | 1387.1 | 1159.4 | 2546.4 | 1401.3 | 1326.0 | 2727.3 | 3.3493 | 2.2737 | 5.6230 |
| 315 | 10.547 | 0.001 472 | 0.016 867 | 1415.5 | 1121.1 | 2536.6 | 1431.0 | 1283.5 | 2714.5 | 3.3982 | 2.1821 | 5.5804 |
| 320 | 11.274 | 0.001 499 | 0.015 488 | 1444.6 | 1080.9 | 2525.5 | 1461.5 | 1238.6 | 2700.1 | 3.4480 | 2.0882 | 5.5362 |
| 330 | 12.845 | 0.001 561 | 0.012 996 | 1505.3 | 993.7 | 2498.9 | 1525.3 | 1140.6 | 2665.9 | 3.5507 | 1.8909 | 5.4417 |
| 340 | 14.586 | 0.001 638 | 0.010 797 | 1570.3 | 894.3 | 2464.6 | 1594.2 | 1027.9 | 2622.0 | 3.6594 | 1.6763 | 5.3357 |
| 350 | 16.513 | 0.001 740 | 0.008 813 | 1641.9 | 776.6 | 2418.4 | 1670.6 | 893.4 | 2563.9 | 3.7777 | 1.4335 | 5.2112 |
| 360 | 18.651 | 0.001 893 | 0.006 945 | 1725.2 | 626.3 | 2351.5 | 1760.5 | 720.5 | 2481.0 | 3.9147 | 1.1379 | 5.0526 |
| 370 | 21.03 | 0.002 213 | 0.004 925 | 1844.0 | 384.5 | 2228.5 | 1890.5 | 441.6 | 2332.1 | 4.1106 | .6865 | 4.7971 |
| 374.14 | 22.09 | 0.003 155 | 0.003 155 | 2029.6 | 0 | 2029.6 | 2099.3 | 0 | 2099.3 | 4.4298 | 0 | 4.4298 |

**TABLE A.1.2**

**Vapeur saturée: table de la pression**

| Pres. kPa $P$ | Temp. °C $T$ | Volume massique m³/kg — Liquide sat. $v_f$ | Vapeur sat. $v_g$ | Énergie interne kJ/kg — Liquide sat. $u_f$ | Évap. $u_{fg}$ | Vapeur sat. $u_g$ | Enthalpie kJ/kg — Liquide sat. $h_f$ | Évap. $h_{fg}$ | Vapeur sat. $h_g$ | Entropie kJ/kg·K — Liquide sat. $s_f$ | Évap. $s_{fg}$ | Vapeur sat. $s_g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.6113 | 0.01 | 0.001 000 | 206.14 | .00 | 2375.3 | 2375.3 | .01 | 2501.3 | 2501.4 | .0000 | 9.1562 | 9.1562 |
| 1.0 | 6.98 | 0.001 000 | 129.21 | 29.30 | 2355.7 | 2385.0 | 29.30 | 2484.9 | 2514.2 | .1059 | 8.8697 | 8.9756 |
| 1.5 | 13.03 | 0.001 001 | 87.98 | 54.71 | 2338.6 | 2393.3 | 54.71 | 2470.6 | 2525.3 | .1957 | 8.6322 | 8.8279 |
| 2.0 | 17.50 | 0.001 001 | 67.00 | 73.48 | 2326.0 | 2399.5 | 73.48 | 2460.0 | 2533.5 | .2607 | 8.4629 | 8.7237 |
| 2.5 | 21.08 | 0.001 002 | 54.25 | 88.48 | 2315.9 | 2404.4 | 88.49 | 2451.6 | 2540.0 | .3120 | 8.3311 | 8.6432 |
| 3.0 | 24.08 | 0.001 003 | 45.67 | 101.04 | 2307.5 | 2408.5 | 101.05 | 2444.5 | 2545.5 | .3545 | 8.2231 | 8.5776 |
| 4.0 | 28.96 | 0.001 004 | 34.80 | 121.45 | 2293.7 | 2415.2 | 121.46 | 2432.9 | 2554.4 | .4226 | 8.0520 | 8.4746 |
| 5.0 | 32.88 | 0.001 005 | 28.19 | 137.81 | 2282.7 | 2420.5 | 137.82 | 2423.7 | 2561.5 | .4764 | 7.9187 | 8.3951 |
| 7.5 | 40.29 | 0.001 008 | 19.24 | 168.78 | 2261.7 | 2430.5 | 168.79 | 2406.0 | 2574.8 | .5764 | 7.6750 | 8.2515 |
| 10 | 45.81 | 0.001 010 | 14.67 | 191.82 | 2246.1 | 2437.9 | 191.83 | 2392.8 | 2584.7 | .6493 | 7.5009 | 8.1502 |
| 15 | 53.97 | 0.001 014 | 10.02 | 225.92 | 2222.8 | 2448.7 | 225.94 | 2373.1 | 2599.1 | .7549 | 7.2536 | 8.0085 |
| 20 | 60.06 | 0.001 017 | 7.649 | 251.38 | 2205.4 | 2456.7 | 251.40 | 2358.3 | 2609.7 | .8320 | 7.0766 | 7.9085 |
| 25 | 64.97 | 0.001 020 | 6.204 | 271.90 | 2191.2 | 2463.1 | 271.93 | 2346.3 | 2618.2 | .8931 | 6.9383 | 7.8314 |
| 30 | 69.10 | 0.001 022 | 5.229 | 289.20 | 2179.2 | 2468.4 | 289.23 | 2336.1 | 2625.3 | .9439 | 6.8247 | 7.7686 |
| 40 | 75.87 | 0.001 027 | 3.993 | 317.53 | 2159.5 | 2477.0 | 317.58 | 2319.2 | 2636.8 | 1.0259 | 6.6441 | 7.6700 |
| 50 | 81.33 | 0.001 030 | 3.240 | 340.44 | 2143.4 | 2483.9 | 340.49 | 2305.4 | 2645.9 | 1.0910 | 6.5029 | 7.5939 |
| 75 | 91.78 | 0.001 037 | 2.217 | 384.31 | 2112.4 | 2496.7 | 384.39 | 2278.6 | 2663.0 | 1.2130 | 6.2434 | 7.4564 |
| MPa | | | | | | | | | | | | |
| 0.100 | 99.63 | 0.001 043 | 1.6940 | 417.36 | 2088.7 | 2506.1 | 417.46 | 2258.0 | 2675.5 | 1.3026 | 6.0568 | 7.3594 |
| 0.125 | 105.99 | 0.001 048 | 1.3749 | 444.19 | 2069.3 | 2513.5 | 444.32 | 2241.0 | 2685.4 | 1.3740 | 5.9104 | 7.2844 |
| 0.150 | 111.37 | 0.001 053 | 1.1593 | 466.94 | 2052.7 | 2519.7 | 467.11 | 2226.5 | 2693.6 | 1.4336 | 5.7897 | 7.2233 |
| 0.175 | 116.06 | 0.001 057 | 1.0036 | 486.80 | 2038.1 | 2524.9 | 486.99 | 2213.6 | 2700.6 | 1.4849 | 5.6868 | 7.1717 |
| 0.200 | 120.23 | 0.001 061 | 0.8857 | 504.49 | 2025.0 | 2529.5 | 504.70 | 2201.9 | 2706.7 | 1.5301 | 5.5970 | 7.1271 |

**TABL.. ..1.2 *(suite)***

**Vapeur saturée: table de la pression**

| | | Volume massique m³/kg | | Énergie interne kJ/kg | | | Enthalpie kJ/kg | | | Entropie kJ/kg·K | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pres. MPa $P$ | Temp. °C $T$ | Liquide sat. $v_f$ | Vapeur sat. $v_g$ | Liquide sat. $u_f$ | Évap. $u_{fg}$ | Vapeur sat. $u_g$ | Liquide sat. $h_f$ | Évap. $h_{fg}$ | Vapeur sat. $h_g$ | Liquide sat. $s_f$ | Évap. $s_{fg}$ | Vapeur sat. $s_g$ |
| 0.225 | 124.00 | 0.001 064 | 0.7933 | 520.47 | 2013.1 | 2533.6 | 520.72 | 2191.3 | 2712.1 | 1.5706 | 5.5173 | 7.0878 |
| 0.250 | 127.44 | 0.001 067 | 0.7187 | 535.10 | 2002.1 | 2537.2 | 535.37 | 2181.5 | 2716.9 | 1.6072 | 5.4455 | 7.0527 |
| 0.275 | 130.60 | 0.001 070 | 0.6573 | 548.59 | 1991.9 | 2540.5 | 548.89 | 2172.4 | 2721.3 | 1.6408 | 5.3801 | 7.0209 |
| 0.300 | 133.55 | 0.001 073 | 0.6058 | 561.15 | 1982.4 | 2543.6 | 561.47 | 2163.8 | 2725.3 | 1.6718 | 5.3201 | 6.9919 |
| 0.325 | 136.30 | 0.001 076 | 0.5620 | 572.90 | 1973.5 | 2546.4 | 573.25 | 2155.8 | 2729.0 | 1.7006 | 5.2646 | 6.9652 |
| 0.350 | 138.88 | 0.001 079 | 0.5243 | 583.95 | 1965.0 | 2548.9 | 584.33 | 2148.1 | 2732.4 | 1.7275 | 5.2130 | 6.9405 |
| 0.375 | 141.32 | 0.001 081 | 0.4914 | 594.40 | 1956.9 | 2551.3 | 594.81 | 2140.8 | 2735.6 | 1.7528 | 5.1647 | 6.9175 |
| 0.40 | 143.63 | 0.001 084 | 0.4625 | 604.31 | 1949.3 | 2553.6 | 604.74 | 2133.8 | 2738.6 | 1.7766 | 5.1193 | 6.8959 |
| 0.45 | 147.93 | 0.001 088 | 0.4140 | 622.77 | 1934.9 | 2557.6 | 623.25 | 2120.7 | 2743.9 | 1.8207 | 5.0359 | 6.8565 |
| 0.50 | 151.86 | 0.001 093 | 0.3749 | 639.68 | 1921.6 | 2561.2 | 640.23 | 2108.5 | 2748.7 | 1.8607 | 4.9606 | 6.8213 |
| 0.55 | 155.48 | 0.001 097 | 0.3427 | 655.32 | 1909.2 | 2564.5 | 655.93 | 2097.0 | 2753.0 | 1.8973 | 4.8920 | 6.7893 |
| 0.60 | 158.85 | 0.001 101 | 0.3157 | 669.90 | 1897.5 | 2567.4 | 670.56 | 2086.3 | 2756.8 | 1.9312 | 4.8288 | 6.7600 |
| 0.65 | 162.01 | 0.001 104 | 0.2927 | 683.56 | 1886.5 | 2570.1 | 684.28 | 2076.0 | 2760.3 | 1.9627 | 4.7703 | 6.7331 |
| 0.70 | 164.97 | 0.001 108 | 0.2729 | 696.44 | 1876.1 | 2572.5 | 697.22 | 2066.3 | 2763.5 | 1.9922 | 4.7158 | 6.7080 |
| 0.75 | 167.78 | 0.001 112 | 0.2556 | 708.64 | 1866.1 | 2574.7 | 709.47 | 2057.0 | 2766.4 | 2.0200 | 4.6647 | 6.6847 |
| 0.80 | 170.43 | 0.001 115 | 0.2404 | 720.22 | 1856.6 | 2576.8 | 721.11 | 2048.0 | 2769.1 | 2.0462 | 4.6166 | 6.6628 |
| 0.85 | 172.96 | 0.001 118 | 0.2270 | 731.27 | 1847.4 | 2578.7 | 732.22 | 2039.4 | 2771.6 | 2.0710 | 4.5711 | 6.6421 |
| 0.90 | 175.38 | 0.001 121 | 0.2150 | 741.83 | 1838.6 | 2580.5 | 742.83 | 2031.1 | 2773.9 | 2.0946 | 4.5280 | 6.6226 |
| 0.95 | 177.69 | 0.001 124 | 0.2042 | 751.95 | 1830.2 | 2582.1 | 753.02 | 2023.1 | 2776.1 | 2.1172 | 4.4869 | 6.6041 |
| 1.00 | 179.91 | 0.001 127 | 0.194 44 | 761.68 | 1822.0 | 2583.6 | 762.81 | 2015.3 | 2778.1 | 2.1387 | 4.4478 | 6.5865 |
| 1.10 | 184.09 | 0.001 133 | 0.177 53 | 780.09 | 1806.3 | 2586.4 | 781.34 | 2000.4 | 2781.7 | 2.1792 | 4.3744 | 6.5536 |
| 1.20 | 187.99 | 0.001 139 | 0.163 33 | 797.29 | 1791.5 | 2588.8 | 798.65 | 1986.2 | 2784.8 | 2.2166 | 4.3067 | 6.5233 |
| 1.30 | 191.64 | 0.001 144 | 0.151 25 | 813.44 | 1777.5 | 2591.0 | 814.93 | 1972.7 | 2787.6 | 2.2515 | 4.2438 | 6.4953 |
| 1.40 | 195.07 | 0.001 149 | 0.140 84 | 828.70 | 1764.1 | 2592.8 | 830.30 | 1959.7 | 2790.0 | 2.2842 | 4.1850 | 6.4693 |
| 1.50 | 198.32 | 0.001 154 | 0.131 77 | 843.16 | 1751.3 | 2594.5 | 844.89 | 1947.3 | 2792.2 | 2.3150 | 4.1298 | 6.4448 |
| 1.75 | 205.76 | 0.001 166 | 0.113 49 | 876.46 | 1721.4 | 2597.8 | 878.50 | 1917.9 | 2796.4 | 2.3851 | 4.0044 | 6.3896 |
| 2.00 | 212.42 | 0.001 177 | 0.099 63 | 906.44 | 1693.8 | 2600.3 | 908.79 | 1890.7 | 2799.5 | 2.4474 | 3.8935 | 6.3409 |
| 2.25 | 218.45 | 0.001 187 | 0.088 75 | 933.83 | 1668.2 | 2602.0 | 936.49 | 1865.2 | 2801.7 | 2.5035 | 3.7937 | 6.2972 |
| 2.5 | 223.99 | 0.001 197 | 0.079 98 | 959.11 | 1644.0 | 2603.1 | 962.11 | 1841.0 | 2803.1 | 2.5547 | 3.7028 | 6.2575 |
| 3.0 | 233.90 | 0.001 217 | 0.066 68 | 1004.78 | 1599.3 | 2604.1 | 1008.42 | 1795.7 | 2804.2 | 2.6457 | 3.5412 | 6.1869 |

**TABLE A.1.2** ***(suite)***

**Vapeur saturée: table de la pression**

| Pres. MPa $P$ | Temp. °C $T$ | Volume massique $m^3/kg$ Liquide sat. $v_f$ | Vapeur sat. $v_g$ | Énergie interne kJ/kg Liquide sat. $u_f$ | Évap. $u_{fg}$ | Vapeur sat. $u_g$ | Enthalpie kJ/kg Liquide sat. $h_f$ | Évap. $h_{fg}$ | Vapeur sat. $h_g$ | Entropie kJ/kg·K Liquide sat. $s_f$ | Évap. $s_{fg}$ | Vapeur sat. $s_g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.5 | 242.60 | 0.001 235 | 0.057 07 | 1045.43 | 1558.3 | 2603.7 | 1049.75 | 1753.7 | 2803.4 | 2.7253 | 3.4000 | 6.1253 |
| 4 | 250.40 | 0.001 252 | 0.049 78 | 1082.31 | 1520.0 | 2602.3 | 1087.31 | 1714.1 | 2801.4 | 27964 | 3.2737 | 6.0701 |
| 5 | 263.99 | 0.001 286 | 0.039 44 | 1147.81 | 1449.3 | 2597.1 | 1154.23 | 1640.1 | 2794.3 | 2.9202 | 3.0532 | 5.9734 |
| 6 | 275.64 | 0.001 319 | 0.032 44 | 1205.44 | 1384.3 | 2589.7 | 1213.35 | 1571.0 | 2784.3 | 3.0267 | 2.8625 | 5.8892 |
| 7 | 285.88 | 0.001 351 | 0.027 37 | 1257.55 | 1323.0 | 2580.5 | 1267.00 | 1505.1 | 2772.1 | 3.1211 | 2.6922 | 5.8133 |
| 8 | 295.06 | 0.001 384 | 0.023 52 | 1305.57 | 1264.2 | 2569.8 | 1316.64 | 1441.3 | 2758.0 | 3.2068 | 2.5364 | 5.7432 |
| 9 | 303.40 | 0.001 418 | 0.020 48 | 1350.51 | 1207.3 | 2557.8 | 1363.26 | 1378.9 | 2742.1 | 3.2858 | 2.3915 | 5.6772 |
| 10 | 311.06 | 0.001 452 | 0.018 026 | 1393.04 | 1151.4 | 2544.4 | 1407.56 | 1317.1 | 2724.7 | 3.3596 | 2.2544 | 5.6141 |
| 11 | 318.15 | 0.001 489 | 0.015 987 | 1433.7 | 1096.0 | 2529.8 | 1450.1 | 1255.5 | 2705.6 | 3.4295 | 2.1233 | 5.5527 |
| 12 | 324.75 | 0.001 527 | 0.014 263 | 1473.0 | 1040.7 | 2513.7 | 1491.3 | 1193.6 | 2684.9 | 3.4962 | 1.9962 | 5.4924 |
| 13 | 330.93 | 0.001 567 | 0.012 780 | 1511.1 | 985.0 | 2496.1 | 1531.5 | 1130.7 | 2662.2 | 3.5606 | 1.8718 | 5.4323 |
| 14 | 336.75 | 0.001 611 | 0.011 485 | 1548.6 | 928.2 | 2476.8 | 1571.1 | 1066.5 | 2637.6 | 3.6232 | 1.7485 | 5.3717 |
| 15 | 342.24 | 0.001 658 | 0.010 337 | 1585.6 | 869.8 | 2455.5 | 1610.5 | 1000.0 | 2610.5 | 3.6848 | 1.6249 | 5.3098 |
| 16 | 347.44 | 0.001 711 | 0.009 306 | 1622.7 | 809.0 | 2431.7 | 1650.1 | 930.6 | 2580.6 | 3.7461 | 1.4994 | 5.2455 |
| 17 | 352.37 | 0.001 770 | 0.008 364 | 1660.2 | 744.8 | 2405.0 | 1690.3 | 856.9 | 2547.2 | 3.8079 | 1.3698 | 5.1777 |
| 18 | 357.06 | 0.001 840 | 0.007 489 | 1698.9 | 675.4 | 2374.3 | 1732.0 | 777.1 | 2509.1 | 3.8715 | 1.2329 | 5.1044 |
| 19 | 361.54 | 0.001 924 | 0.006 657 | 1739.9 | 598.1 | 2338.1 | 1776.5 | 688.0 | 2464.5 | 3.9388 | 1.0839 | 5.0228 |
| 20 | 365.81 | 0.002 036 | 0.005 834 | 1785.6 | 507.5 | 2293.0 | 1826.3 | 583.4 | 2409.7 | 4.0139 | .9130 | 4.9269 |
| 21 | 369.89 | 0.002 207 | 0.004 952 | 1842.1 | 388.5 | 2230.6 | 1888.4 | 446.2 | 2334.6 | 4.1075 | .6938 | 4.8013 |
| 22 | 373.80 | 0.002 742 | 0.003 568 | 1961.9 | 125.2 | 2087.1 | 2022.2 | 143.4 | 2165.6 | 4.3110 | .2216 | 4.5327 |
| 22.09 | 374.14 | 0.003 155 | 0.003 155 | 2029.6 | 0 | 2029.6 | 2099.3 | 0 | 2099.3 | 4.4298 | 0 | 4.4298 |

**TABLE A.1.3**

**Vapeur surchauffée**

| T | v | u | h | s | v | u | h | s | v | u | h | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P = .010 MPa (45.81) | | | | P = .050 MPa (81.33) | | | | P = .10 MPa (99.63) | | | |
| Sat. | 14.674 | 2437.9 | 2584.7 | 8.1502 | 3.240 | 2483.9 | 2645.9 | 7.5939 | 1.6940 | 2506.1 | 2675.5 | 7.3594 |
| 50 | 14.869 | 2443.9 | 2592.6 | 8.1749 | | | | | | | | |
| 100 | 17.196 | 2515.5 | 2687.5 | 8.4479 | 3.418 | 2511.6 | 2682.5 | 7.6947 | 1.6958 | 2506.7 | 2676.2 | 7.3614 |
| 150 | 19.512 | 2587.9 | 2783.0 | 8.6882 | 3.889 | 2585.6 | 2780.1 | 7.9401 | 1.9364 | 2582.8 | 2776.4 | 7.6134 |
| 200 | 21.825 | 2661.3 | 2879.5 | 8.9038 | 4.356 | 2659.9 | 2877.7 | 8.1580 | 2.172 | 2658.1 | 2875.3 | 7.8343 |
| 250 | 24.136 | 2736.0 | 2977.3 | 9.1002 | 4.820 | 2735.0 | 2976.0 | 8.3556 | 2.406 | 2733.7 | 2974.3 | 8.0333 |
| 300 | 26.445 | 2812.1 | 3076.5 | 9.2813 | 5.284 | 2811.3 | 3075.5 | 8.5373 | 2.639 | 2810.4 | 3074.3 | 8.2158 |
| 400 | 31.063 | 2968.9 | 3279.6 | 9.6077 | 6.209 | 2968.5 | 3278.9 | 8.8642 | 3.103 | 2967.9 | 3278.2 | 8.5435 |
| 500 | 35.679 | 3132.3 | 3489.1 | 9.8978 | 7.134 | 3132.0 | 3488.7 | 9.1546 | 3.565 | 3131.6 | 3488.1 | 8.8342 |
| 600 | 40.295 | 3302.5 | 3705.4 | 10.1608 | 8.057 | 3302.2 | 3705.1 | 9.4178 | 4.028 | 3301.9 | 3704.7 | 9.0976 |
| 700 | 44.911 | 3479.6 | 3928.7 | 10.4028 | 8.981 | 3479.4 | 3928.5 | 9.6599 | 4.490 | 3479.2 | 3928.2 | 9.3398 |
| 800 | 49.526 | 3663.8 | 4159.0 | 10.6281 | 9.904 | 3663.6 | 4158.9 | 9.8852 | 4.952 | 3663.5 | 4158.6 | 9.5652 |
| 900 | 54.141 | 3855.0 | 4396.4 | 10.8396 | 10.828 | 3854.9 | 4396.3 | 10.0967 | 5.414 | 3854.8 | 4396.1 | 9.7767 |
| 1000 | 58.757 | 4053.0 | 4640.6 | 11.0393 | 11.751 | 4052.9 | 4640.5 | 10.2964 | 5.875 | 4052.8 | 4640.3 | 9.9764 |
| 1100 | 63.372 | 4257.5 | 4891.2 | 11.2287 | 12.674 | 4257.4 | 4891.1 | 10.4859 | 6.337 | 4257.3 | 4891.0 | 10.1659 |
| 1200 | 67.987 | 4467.9 | 5147.8 | 11.4091 | 13.597 | 4467.8 | 5147.7 | 10.6662 | 6.799 | 4467.7 | 5147.6 | 10.3463 |
| 1300 | 72.602 | 4683.7 | 5409.7 | 11.5811 | 14.521 | 4683.6 | 5409.6 | 10.8382 | 7.260 | 4683.5 | 5409.5 | 10.5183 |
| | P = .20 MPa (120.23) | | | | P = .30 MPa (133.55) | | | | P = .40 MPa (143.63) | | | |
| Sat. | .8857 | 2529.5 | 2706.7 | 7.1272 | .6058 | 2543.6 | 2725.3 | 6.9919 | .4625 | 2553.6 | 2738.6 | 6.8959 |
| 150 | .9596 | 2576.9 | 2768.8 | 7.2795 | .6339 | 2570.8 | 2761.0 | 7.0778 | .4708 | 2564.5 | 2752.8 | 6.9299 |
| 200 | 1.0803 | 2654.4 | 2870.5 | 7.5066 | .7163 | 2650.7 | 2865.6 | 7.3115 | .5342 | 2646.8 | 2860.5 | 7.1706 |
| 250 | 1.1988 | 2731.2 | 2971.0 | 7.7086 | .7964 | 2728.7 | 2967.6 | 7.5166 | .5951 | 2726.1 | 2964.2 | 7.3789 |
| 300 | 1.3162 | 2808.6 | 3071.8 | 7.8926 | .8753 | 2806.7 | 3069.3 | 7.7022 | .6548 | 2804.8 | 3066.8 | 7.5662 |
| 400 | 1.5493 | 2966.7 | 3276.6 | 8.2218 | 1.0315 | 2965.6 | 3275.0 | 8.0330 | .7726 | 2964.4 | 3273.4 | 7.8985 |

**TABLE A.1.3 *(suite)***

**Vapeur surchauffée**

| $T$ | $v$ | $u$ | $h$ | $s$ | $v$ | $u$ | $h$ | $s$ | $v$ | $u$ | $h$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P$ = .20 MPa (120.23) | | | | $P$ = .30 MPa (133.55) | | | | $P$ = .40 MPa (143.63) | | | |
| 500 | 1.7814 | 3130.8 | 3487.1 | 8.5133 | 1.1867 | 3130.0 | 3486.0 | 8.3251 | .8893 | 3129.2 | 3484.9 | 8.1913 |
| 600 | 2.013 | 3301.4 | 3704.0 | 8.7770 | 1.3414 | 3300.8 | 3703.2 | 8.5892 | 1.0055 | 3300.2 | 3702.4 | 8.4558 |
| 700 | 2.244 | 3478.8 | 3927.6 | 9.0194 | 1.4957 | 3478.4 | 3927.1 | 8.8319 | 1.1215 | 3477.9 | 3926.5 | 8.6987 |
| 800 | 2.475 | 3663.1 | 4158.2 | 9.2449 | 1.6499 | 3662.9 | 4157.8 | 9.0576 | 1.2372 | 3662.4 | 4157.3 | 8.9244 |
| 900 | 2.706 | 3854.5 | 4395.8 | 9.4566 | 1.8041 | 3854.2 | 4395.4 | 9.2692 | 1.3529 | 3853.9 | 4395.1 | 9.1362 |
| 1000 | 2.937 | 4052.5 | 4640.0 | 9.6563 | 1.9581 | 4052.3 | 4639.7 | 9.4690 | 1.4685 | 4052.0 | 4639.4 | 9.3360 |
| 1100 | 3.168 | 4257.0 | 4890.7 | 9.8458 | 2.1121 | 4256.8 | 4890.4 | 9.6585 | 1.5840 | 4256.5 | 4890.2 | 9.5256 |
| 1200 | 3.399 | 4467.5 | 5147.3 | 10.0262 | 2.2661 | 4467.2 | 5147.1 | 9.8389 | 1.6996 | 4467.0 | 5146.8 | 9.7060 |
| 1300 | 3.630 | 4683.2 | 5409.3 | 10.1982 | 2.4201 | 4683.0 | 5409.0 | 10.0110 | 1.8151 | 4682.8 | 5408.8 | 9.8780 |
| | $P$ = .50 MPa (151.86) | | | | $P$ = .60 MPa (158.85) | | | | $P$ = .80 MPa (170.43) | | | |
| Sat. | .3749 | 2561.2 | 2748.7 | 6.8213 | .3157 | 2567.4 | 2756.8 | 6.7600 | .2404 | 2576.8 | 2769.1 | 6.6628 |
| 200 | .4249 | 2642.9 | 2855.4 | 7.0592 | .3520 | 2638.9 | 2850.1 | 6.9665 | .2608 | 2630.6 | 2839.3 | 6.8158 |
| 250 | .4744 | 2723.5 | 2960.7 | 7.2709 | .3938 | 2720.9 | 2957.2 | 7.1816 | .2931 | 2715.5 | 2950.0 | 7.0384 |
| 300 | .5226 | 2802.9 | 3064.2 | 7.4599 | .4344 | 2801.0 | 3061.6 | 7.3724 | .3241 | 2797.2 | 3056.5 | 7.2328 |
| 350 | .5701 | 2882.6 | 3167.7 | 7.6329 | .4742 | 2881.2 | 3165.7 | 7.5464 | .3544 | 2878.2 | 3161.7 | 7.4089 |
| 400 | .6173 | 2963.2 | 3271.9 | 7.7938 | .5137 | 2962.1 | 3270.3 | 7.7079 | .3843 | 2959.7 | 3267.1 | 7.5716 |
| 500 | .7109 | 3128.4 | 3483.9 | 8.0873 | .5920 | 3127.6 | 3482.8 | 8.0021 | .4433 | 3126.0 | 3480.6 | 7.8673 |
| 600 | .8041 | 3299.6 | 3701.7 | 8.3522 | .6697 | 3299.1 | 3700.9 | 8.2674 | .5018 | 3297.9 | 3699.4 | 8.1333 |
| 700 | .8969 | 3477.5 | 3925.9 | 8.5952 | .7472 | 3477.0 | 3925.3 | 8.5107 | .5601 | 3476.2 | 3924.2 | 8.3770 |
| 800 | .9896 | 3662.1 | 4156.9 | 8.8211 | .8245 | 3661.8 | 4156.5 | 8.7367 | .6181 | 3661.1 | 4155.6 | 8.6033 |
| 900 | 1.0822 | 3853.6 | 4394.7 | 9.0329 | .9017 | 3853.4 | 4394.4 | 8.9486 | .6761 | 3852.8 | 4393.7 | 8.8153 |
| 1000 | 1.1747 | 4051.8 | 4639.1 | 9.2328 | .9788 | 4051.5 | 4638.8 | 9.1485 | .7340 | 4051.0 | 4638.2 | 9.0153 |

**TABLE A.1.3** ***(suite)***

**Vapeur surchauffée**

| T | v | u | h | s | v | u | h | s | v | u | h | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P = .50 MPa (151.86) | | | | P = .60 MPa (158.85) | | | | P = .80 MPa (170.43) | | | |
| 1100 | 1.2672 | 4256.3 | 4889.9 | 9.4224 | 1.0559 | 4256.1 | 4889.6 | 9.3381 | .7919 | 4255.6 | 4889.1 | 9.2050 |
| 1200 | 1.3596 | 4466.8 | 5146.6 | 9.6029 | 1.1330 | 4466.5 | 5146.3 | 9.5185 | .8497 | 4466.1 | 5145.9 | 9.3855 |
| 1300 | 1.4521 | 4682.5 | 5408.6 | 9.7749 | 1.2101 | 4682.3 | 5408.3 | 9.6906 | .9076 | 4681.8 | 5407.9 | 9.5575 |
| | P = 1.00 MPa (179.91) | | | | P = 1.20 MPa (187.99) | | | | P = 1.40 MPa (195.07) | | | |
| Sat. | .194 44 | 2583.6 | 2778.1 | 6.5865 | .163 33 | 2588.8 | 2784.8 | 6.5233 | .140 84 | 2592.8 | 2790.0 | 6.4693 |
| 200 | .2060 | 2621.9 | 2827.9 | 6.6940 | .169 30 | 2612.8 | 2815.9 | 6.5898 | .143 02 | 2603.1 | 2803.3 | 6.4975 |
| 250 | .2327 | 2709.9 | 2942.6 | 6.9247 | .192 34 | 2704.2 | 2935.0 | 6.8294 | .163 50 | 2698.3 | 2927.2 | 6.7467 |
| 300 | .2579 | 2793.2 | 3051.2 | 7.1229 | .2138 | 2789.2 | 3045.8 | 7.0317 | .182 28 | 2785.2 | 3040.4 | 6.9534 |
| 350 | .2825 | 2875.2 | 3157.7 | 7.3011 | .2345 | 2872.2 | 3153.6 | 7.2121 | .2003 | 2869.2 | 3149.5 | 7.1360 |
| 400 | .3066 | 2957.3 | 3263.9 | 7.4651 | .2548 | 2954.9 | 3260.7 | 7.3774 | .2178 | 2952.5 | 3257.5 | 7.3026 |
| 500 | .3541 | 3124.4 | 3478.5 | 7.7622 | .2946 | 3122.8 | 3476.3 | 7.6759 | .2521 | 3121.1 | 3474.1 | 7.6027 |
| 600 | .4011 | 3296.8 | 3697.9 | 8.0290 | .3339 | 3295.6 | 3696.3 | 7.9435 | .2860 | 3294.4 | 3694.8 | 7.8710 |
| 700 | .4478 | 3475.3 | 3923.1 | 8.2731 | .3729 | 3474.4 | 3922.0 | 8.1881 | .3195 | 3473.6 | 3920.8 | 8.1160 |
| 800 | .4943 | 3660.4 | 4154.7 | 8.4996 | .4118 | 3659.7 | 4153.8 | 8.4148 | .3528 | 3659.0 | 4153.0 | 8.3431 |
| 900 | .5407 | 3852.2 | 4392.9 | 8.7118 | .4505 | 3851.6 | 4392.2 | 8.6272 | .3861 | 3851.1 | 4391.5 | 8.5556 |
| 1000 | .5871 | 4050.5 | 4637.6 | 8.9119 | .4892 | 4050.0 | 4637.0 | 8.8274 | .4192 | 4049.5 | 4636.4 | 8.7559 |
| 1100 | .6335 | 4255.1 | 4888.6 | 9.1017 | .5278 | 4254.6 | 4888.0 | 9.0172 | .4524 | 4254.1 | 4887.5 | 8.9457 |
| 1200 | .6798 | 4465.6 | 5145.4 | 9.2822 | .5665 | 4465.1 | 5144.9 | 9.1977 | .4855 | 4464.7 | 5144.4 | 9.1262 |
| 1300 | .7261 | 4681.3 | 5407.4 | 9.4543 | .6051 | 4680.9 | 5407.0 | 9.3698 | .5186 | 4680.4 | 5406.5 | 9.2984 |
| | P = 1.60 MPa (201.41) | | | | P = 1.80 MPa (207.15) | | | | P = 2.00 MPa (212.42) | | | |
| Sat. | .123 80 | 2596.0 | 2794.0 | 6.4218 | .110 42 | 2598.4 | 2797.1 | 6.3794 | .099 63 | 2600.3 | 2799.5 | 6.3409 |
| 225 | .132 87 | 2644.7 | 2857.3 | 6.5518 | .116 73 | 2636.6 | 2846.7 | 6.4808 | .103 77 | 2628.3 | 2835.8 | 6.4147 |
| 250 | .141 84 | 2692.3 | 2919.2 | 6.6732 | .124 97 | 2686.0 | 2911.0 | 6.6066 | .111 44 | 2679.6 | 2902.5 | 6.5453 |
| 300 | .158 62 | 2781.1 | 3034.8 | 6.8844 | .140 21 | 2776.9 | 3029.2 | 6.8226 | .125 47 | 2772.6 | 3023.5 | 6.7664 |
| 350 | .174 56 | 2866.1 | 3145.4 | 7.0694 | .154 57 | 2863.0 | 3141.2 | 7.0100 | .138 57 | 2859.8 | 3137.0 | 6.9563 |
| 400 | .190 05 | 2950.1 | 3254.2 | 7.2374 | .168 47 | 2947.7 | 3250.9 | 7.1794 | .151 20 | 2945.2 | 3247.6 | 7.1271 |
| 500 | .2203 | 3119.5 | 3472.0 | 7.5390 | .195 50 | 3117.9 | 3469.8 | 7.4825 | .175 68 | 3116.2 | 3467.6 | 7.4317 |
| 600 | .2500 | 3293.3 | 3693.2 | 7.8080 | .2220 | 3292.1 | 3691.7 | 7.7523 | .199 60 | 3290.9 | 3690.1 | 7.7024 |
| 700 | .2794 | 3472.7 | 3919.7 | 8.0535 | .2482 | 3471.8 | 3918.5 | 7.9983 | .2232 | 3470.9 | 3917.4 | 7.9487 |

**TABLE A.1.3 *(suite)***

**Vapeur surchauffée**

| T | v | u | h | s | v | u | h | s | v | u | h | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P = 1.60 MPa (201.41) | | | | P = 1.80 MPa (207.15) | | | | P = 2.00 MPa (212.42) | | | |
| 800 | .3086 | 3658.3 | 4152.1 | 8.2808 | .2742 | 3657.6 | 4151.2 | 8.2258 | .2467 | 3657.0 | 4150.3 | 8.1765 |
| 900 | .3377 | 3850.5 | 4390.8 | 8.4935 | .3001 | 3849.9 | 4390.1 | 8.4386 | .2700 | 3849.3 | 4389.4 | 8.3895 |
| 1000 | .3668 | 4049.0 | 4635.8 | 8.6938 | .3260 | 4048.5 | 4635.2 | 8.6391 | .2933 | 4048.0 | 4634.6 | 8.5901 |
| 1100 | .3958 | 4253.7 | 4887.0 | 8.8837 | .3518 | 4253.2 | 4886.4 | 8.8290 | .3166 | 4252.7 | 4885.9 | 8.7800 |
| 1200 | .4248 | 4464.2 | 5143.9 | 9.0643 | .3776 | 4463.7 | 5143.4 | 9.0096 | .3398 | 4463.3 | 5142.9 | 8.9607 |
| 1300 | .4538 | 4679.9 | 5406.0 | 9.2364 | .4034 | 4679.5 | 5405.6 | 9.1818 | .3631 | 4679.0 | 5405.1 | 9.1329 |
| | P = 2.50 MPa (223.99) | | | | P = 3.00 MPa (233.90) | | | | P = 3.50 MPa (242.60) | | | |
| Sat. | .079 98 | 2603.1 | 2803.1 | 6.2575 | .066 68 | 2604.1 | 2804.2 | 6.1869 | .057 07 | 2603.7 | 2803.4 | 6.1253 |
| 225 | .080 27 | 2605.6 | 2806.3 | 6.2639 | | | | | | | | |
| 250 | .087 00 | 2662.6 | 2880.1 | 6.4085 | .070 58 | 2644.0 | 2855.8 | 6.2872 | .058 72 | 2623.7 | 2829.2 | 6.1749 |
| 300 | .098 90 | 2761.6 | 3008.8 | 6.6438 | .081 14 | 2750.1 | 2993.5 | 6.5390 | .068 42 | 2738.0 | 2977.5 | 6.4461 |
| 350 | .109 76 | 2851.9 | 3126.3 | 6.8403 | .090 53 | 2843.7 | 3115.3 | 6.7428 | .076 78 | 2835.3 | 3104.0 | 6.6579 |
| 400 | .120 10 | 2939.1 | 3239.3 | 7.0148 | .099 36 | 2932.8 | 3230.9 | 6.9212 | .084 53 | 2926.4 | 3222.3 | 6.8405 |
| 450 | .130 14 | 3025.5 | 3350.8 | 7.1746 | .107 87 | 3020.4 | 3344.0 | 7.0834 | .091 96 | 3015.3 | 3337.2 | 7.0052 |
| 500 | .139 98 | 3112.1 | 3462.1 | 7.3234 | .116 19 | 3108.0 | 3456.5 | 7.2338 | .099 18 | 3103.0 | 3450.9 | 7.1572 |
| 600 | .159 30 | 3288.0 | 3686.3 | 7.5960 | .132 43 | 3285.0 | 3682.3 | 7.5085 | .113 24 | 3282.1 | 3678.4 | 7.4339 |
| 700 | .178 32 | 3468.7 | 3914.5 | 7.8435 | .148 38 | 3466.5 | 3911.7 | 7.7571 | .126 99 | 3464.3 | 3908.8 | 7.6837 |
| 800 | .197 16 | 3655.3 | 4148.2 | 8.0720 | .164 14 | 3653.5 | 4145.9 | 7.9862 | .140 56 | 3651.8 | 4143.7 | 7.9134 |
| 900 | .215 90 | 3847.9 | 4387.6 | 8.2853 | .179 80 | 3846.5 | 4385.9 | 8.1999 | .154 02 | 3845.0 | 4384.1 | 8.1276 |
| 1000 | .2346 | 4046.7 | 4633.1 | 8.4861 | .195 41 | 4045.4 | 4631.6 | 8.4009 | .167 43 | 4044.1 | 4630.1 | 8.3288 |
| 1100 | .2532 | 4251.5 | 4884.6 | 8.6762 | .210 98 | 4250.3 | 4883.3 | 8.5912 | .180 80 | 4249.2 | 4881.9 | 8.5192 |
| 1200 | .2718 | 4462.1 | 5141.7 | 8.8569 | .226 52 | 4460.9 | 5140.5 | 8.7720 | .194 15 | 4459.8 | 5139.3 | 8.7000 |
| 1300 | .2905 | 4677.8 | 5404.0 | 9.0291 | .242 06 | 4676.6 | 5402.8 | 8.9442 | .207 49 | 4675.5 | 5401.7 | 8.8723 |

**TABLE A.1.3** ***(suite)***

**Vapeur surchauffée**

| *T* | *v* | *u* | *h* | *s* | *v* | *u* | *h* | *s* | *v* | *u* | *h* | *s* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *P* = 4.0 MPa (250.40) | | | | *P* = 4.5 MPa (257.49) | | | | *P* = 5.0 MPa (263.99) | | | |
| Sat. | .049 78 | 2602.3 | 2801.4 | 6.0701 | .044 06 | 2600.1 | 2798.3 | 6.0198 | .039 44 | 2597.1 | 2794.3 | 5.9734 |
| 275 | .054 57 | 2667.9 | 2886.2 | 6.2285 | .047 30 | 2650.3 | 2863.2 | 6.1401 | .041 41 | 2631.3 | 2838.3 | 6.0544 |
| 300 | .058 84 | 2725.3 | 2960.7 | 6.3615 | .051 35 | 2712.0 | 2943.1 | 6.2828 | .045 32 | 2698.0 | 2924.5 | 6.2084 |
| 350 | .066 45 | 2826.7 | 3092.5 | 6.5821 | .058 40 | 2817.8 | 3080.6 | 6.5131 | .051 94 | 2808.7 | 3068.4 | 6.4493 |
| 400 | .073 41 | 2919.9 | 3213.6 | 6.7690 | .064 75 | 2913.3 | 3204.7 | 6.7047 | .057 81 | 2906.6 | 3195.7 | 6.6459 |
| 450 | .080 02 | 3010.2 | 3330.3 | 6.9363 | .070 74 | 3005.0 | 3323.3 | 6.8746 | .063 30 | 2999.7 | 3316.2 | 6.8186 |
| 500 | .086 43 | 3099.5 | 3445.3 | 7.0901 | .076 51 | 3095.3 | 3439.6 | 7.0301 | .068 57 | 3091.0 | 3433.8 | 6.9759 |
| 600 | .098 85 | 3279.1 | 3674.4 | 7.3688 | .087 65 | 3276.0 | 3670.5 | 7.3110 | .078 69 | 3273.0 | 3666.5 | 7.2589 |
| 700 | .110 95 | 3462.1 | 3905.9 | 7.6198 | .098 47 | 3459.9 | 3903.0 | 7.5631 | .088 49 | 3457.6 | 3900.1 | 7.5122 |
| 800 | .122 87 | 3650.0 | 4141.5 | 7.8502 | .109 11 | 3648.3 | 4139.3 | 7.7942 | .098 11 | 3646.6 | 4137.1 | 7.7440 |
| 900 | .134 69 | 3843.6 | 4382.3 | 8.0647 | .119 65 | 3842.2 | 4380.6 | 8.0091 | .107 62 | 3840.7 | 4378.8 | 7.9593 |
| 1000 | .146 45 | 4042.9 | 4628.7 | 8.2662 | .130 13 | 4041.6 | 4627.2 | 8.2108 | .117 07 | 4040.4 | 4625.7 | 8.1612 |
| 1100 | .158 17 | 4248.0 | 4880.6 | 8.4567 | .140 56 | 4246.8 | 4879.3 | 8.4015 | .126 48 | 4245.6 | 4878.0 | 8.3520 |
| 1200 | .169 87 | 4458.6 | 5138.1 | 8.6376 | .150 98 | 4457.5 | 5136.9 | 8.5825 | .135 87 | 4456.3 | 5135.7 | 8.5331 |
| 1300 | .181 56 | 4674.3 | 5400.5 | 8.8100 | .161 39 | 4673.1 | 5399.4 | 8.7549 | .145 26 | 4672.0 | 5398.2 | 8.7055 |
| | *P* = 6.0 MPa (275.64) | | | | *P* = 7.0 MPa (285.88) | | | | *P* = 8.0 MPa (295.06) | | | |
| Sat. | .032 44 | 2589.7 | 2784.3 | 5.8892 | .027 37 | 2580.5 | 2772.1 | 5.8133 | .023 52 | 2569.8 | 2758.0 | 5.7432 |
| 300 | .036 16 | 2667.2 | 2884.2 | 6.0674 | .029 47 | 2632.2 | 2838.4 | 5.9305 | .024 26 | 2590.9 | 2785.0 | 5.7906 |
| 350 | .042 23 | 2789.6 | 3043.0 | 6.3335 | .035 24 | 2769.4 | 3016.0 | 6.2283 | .029 95 | 2747.7 | 2987.3 | 6.1301 |
| 400 | .047 39 | 2892.9 | 3177.2 | 6.5408 | .039 93 | 2878.6 | 3158.1 | 6.4478 | .034 32 | 2863.8 | 3138.3 | 6.3634 |
| 450 | .052 14 | 2988.9 | 3301.8 | 6.7193 | .044 16 | 2978.0 | 3287.1 | 6.6327 | .038 17 | 2966.7 | 3272.0 | 6.5551 |
| 500 | .056 65 | 3082.2 | 3422.2 | 6.8803 | .048 14 | 3073.4 | 3410.3 | 6.7975 | .041 75 | 3064.3 | 3398.3 | 6.7240 |
| 550 | .061 01 | 3174.6 | 3540.6 | 7.0288 | .051 95 | 3167.2 | 3530.9 | 6.9486 | .045 16 | 3159.8 | 3521.0 | 6.8778 |
| 600 | .065 25 | 3266.9 | 3658.4 | 7.1677 | .055 65 | 3260.7 | 3650.3 | 7.0894 | .048 45 | 3254.4 | 3642.0 | 7.0206 |
| 700 | .073 52 | 3453.1 | 3894.2 | 7.4234 | .062 83 | 3448.5 | 3888.3 | 7.3476 | .054 81 | 3443.9 | 3882.4 | 7.2812 |
| 800 | .081 60 | 3643.1 | 4132.7 | 7.6566 | .069 81 | 3639.5 | 4128.2 | 7.5822 | .060 97 | 3636.0 | 4123.8 | 7.5173 |
| 900 | .089 58 | 3837.8 | 4375.3 | 7.8727 | .076 69 | 3835.0 | 4371.8 | 7.7991 | .067 02 | 3832.1 | 4368.3 | 7.7351 |
| 1000 | .097 49 | 4037.8 | 4622.7 | 8.0751 | .083 50 | 4035.3 | 4619.8 | 8.0020 | .073 01 | 4032.8 | 4616.9 | 7.9384 |
| 1100 | .105 36 | 4243.3 | 4875.4 | 8.2661 | .090 27 | 4240.9 | 4872.8 | 8.1933 | .078 96 | 4238.6 | 4870.3 | 8.1300 |

**TABLE A.1.3 *(suite)***

**Vapeur surchauffée**

| *T* | *v* | *u* | *h* | *s* | *v* | *u* | *h* | *s* | *v* | *u* | *h* | *s* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ***P* = 6.0 MPa (275.64)** | | | | ***P* = 7.0 MPa (285.88)** | | | | ***P* = 8.0 MPa (295.06)** | | | |
| 1200 | .113 21 | 4454.0 | 5133.3 | 8.4474 | .097 03 | 4451.7 | 5130.9 | 8.3747 | .084 89 | 4449.5 | 5128.5 | 8.3115 |
| 1300 | .121 06 | 4669.6 | 5396.0 | 8.6199 | .103 77 | 4667.3 | 5393.7 | 8.5473 | .090 80 | 4665.0 | 5391.5 | 8.4842 |
| | ***P* = 9.0 MPa (303.40)** | | | | ***P* = 10.0 MPa (311.06)** | | | | ***P* = 12.5 MPa (327.89)** | | | |
| Sat. | .020 48 | 2557.8 | 2742.1 | 5.6772 | .018 026 | 2544.4 | 2724.7 | 5.6141 | .013 495 | 2505.1 | 2673.8 | 5.4624 |
| 325 | .023 27 | 2646.6 | 2856.0 | 5.8712 | .019 861 | 2610.4 | 2809.1 | 5.7568 | | | | |
| 350 | .025 80 | 2724.4 | 2956.6 | 6.0361 | .022 42 | 2699.2 | 2923.4 | 5.9443 | .016 126 | 2624.6 | 2826.2 | 5.7118 |
| 400 | .029 93 | 2848.4 | 3117.8 | 6.2854 | .026 41 | 2832.4 | 3096.5 | 6.2120 | .020 00 | 2789.3 | 3039.3 | 6.0417 |
| 450 | .033 50 | 2955.2 | 3256.6 | 6.4844 | .029 75 | 2943.4 | 3240.9 | 6.4190 | .022 99 | 2912.5 | 3199.8 | 6.2719 |
| 500 | .036 77 | 3055.2 | 3386.1 | 6.6576 | .032 79 | 3045.8 | 3373.7 | 6.5966 | .025 60 | 3021.7 | 3341.8 | 6.4618 |
| 550 | .039 87 | 3152.2 | 3511.0 | 6.8142 | .035 64 | 3144.6 | 3500.9 | 6.7561 | .028 01 | 3125.0 | 3475.2 | 6.6290 |
| 600 | .042 85 | 3248.1 | 3633.7 | 6.9589 | .038 37 | 3241.7 | 3625.3 | 6.9029 | .030 29 | 3225.4 | 3604.0 | 6.7810 |
| 650 | .045 74 | 3343.6 | 3755.3 | 7.0943 | .041 01 | 3338.2 | 3748.2 | 7.0398 | .032 48 | 3324.4 | 3730.4 | 6.9218 |
| 700 | .048 57 | 3439.3 | 3876.5 | 7.2221 | .043 58 | 3434.7 | 3870.5 | 7.1687 | .034 60 | 3422.9 | 3855.3 | 7.0536 |
| 800 | .054 09 | 3632.5 | 4119.3 | 7.4596 | .048 59 | 3628.9 | 4114.8 | 7.4077 | .038 69 | 3620.0 | 4103.6 | 7.2965 |
| 900 | .059 50 | 3829.2 | 4364.8 | 7.6783 | .053 49 | 3826.3 | 4361.2 | 7.6272 | .042 67 | 3819.1 | 4352.5 | 7.5182 |
| 1000 | .064 85 | 4030.3 | 4614.0 | 7.8821 | .058 32 | 4027.8 | 4611.0 | 7.8315 | .046 58 | 4021.6 | 4603.8 | 7.7237 |
| 1100 | .070 16 | 4236.3 | 4867.7 | 8.0740 | .063 12 | 4234.0 | 4865.1 | 8.0237 | .050 45 | 4228.2 | 4858.8 | 7.9165 |
| 1200 | .075 44 | 4447.2 | 5126.2 | 8.2556 | .067 89 | 4444.9 | 5123.8 | 8.2055 | .054 30 | 4439.3 | 5118.0 | 8.0987 |
| 1300 | .080 72 | 4662.7 | 5389.2 | 8.4284 | .072 65 | 4460.5 | 5387.0 | 8.3783 | .058 13 | 4654.8 | 5381.4 | 8.2717 |
| | ***P* = 15.0 MPa (342.24)** | | | | ***P* = 17.5 MPa (354.75)** | | | | ***P* = 20.0 MPa (365.81)** | | | |
| Sat. | .010 337 | 2455.5 | 2610.5 | 5.3098 | .007 920 | 2390.2 | 2528.8 | 5.1419 | .005 834 | 2293.0 | 2409.7 | 4.9269 |
| 350 | .011 470 | 2520.4 | 2692.4 | 5.4421 | | | | | | | | |

**TABLE A.1.3 *(suite)***

**Vapeur surchauffée**

| T | v | u | h | s | v | u | h | s | v | u | h | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P = 15.0 MPa (342.24) | | | | P = 17.5 MPa (354.75) | | | | P = 20.0 MPa (365.81) | | | |
| 400 | .015 649 | 2740.7 | 2975.5 | 5.8811 | .012 447 | 2685.0 | 2902.9 | 5.7213 | .009 942 | 2619.3 | 2818.1 | 5.5540 |
| 450 | .018 445 | 2879.5 | 3156.2 | 6.1404 | .015 174 | 2844.2 | 3109.7 | 6.0184 | .012 695 | 2806.2 | 3060.1 | 5.9017 |
| 500 | .020 80 | 2996.6 | 3308.6 | 6.3443 | .017 358 | 2970.3 | 3274.1 | 6.2383 | .014 768 | 2942.9 | 3238.2 | 6.1401 |
| 550 | .022 93 | 3104.7 | 3448.6 | 6.5199 | .019 288 | 3083.9 | 3421.4 | 6.4230 | .016 555 | 3062.4 | 3393.5 | 6.3348 |
| 600 | .024 91 | 3208.6 | 3582.3 | 6.6776 | .021 06 | 3191.5 | 3560.1 | 6.5866 | .018 178 | 3174.0 | 3537.6 | 6.5048 |
| 650 | .026 80 | 3310.3 | 3712.3 | 6.8224 | .022 74 | 3296.0 | 3693.9 | 6.7357 | .019 693 | 3281.4 | 3675.3 | 6.6582 |
| 700 | .028 61 | 3410.9 | 3840.1 | 6.9572 | .024 34 | 3398.7 | 3824.6 | 6.8736 | .021 13 | 3386.4 | 3809.0 | 6.7993 |
| 800 | .032 10 | 3610.9 | 4092.4 | 7.2040 | .027 38 | 3601.8 | 4081.1 | 7.1244 | .023 85 | 3592.7 | 4069.7 | 7.0544 |
| 900 | .035 46 | 3811.9 | 4343.8 | 7.4279 | .030 31 | 3804.7 | 4335.1 | 7.3507 | .026 45 | 3797.5 | 4326.4 | 7.2830 |
| 1000 | .038 75 | 4015.4 | 4596.6 | 7.6348 | .033 16 | 4009.3 | 4589.5 | 7.5589 | .028 97 | 4003.1 | 4582.5 | 7.4925 |
| 1100 | .042 00 | 4222.6 | 4852.6 | 7.8283 | .035 97 | 4216.9 | 4846.4 | 7.7531 | .031 45 | 4211.3 | 4840.2 | 7.6874 |
| 1200 | .045 23 | 4433.8 | 5112.3 | 8.0108 | .038 76 | 4428.3 | 5106.6 | 7.9360 | .033 91 | 4422.8 | 5101.0 | 7.8707 |
| 1300 | .048 45 | 4649.1 | 5376.0 | 8.1840 | .041 54 | 4643.5 | 5370.5 | 8.1093 | .036 36 | 4638.0 | 5365.1 | 8.0442 |
| | P = 25.0 MPa | | | | P = 30.0 MPa | | | | P = 35.0 MPa | | | |
| 375 | .001 973 1 | 1798.7 | 1848.0 | 4.0320 | .001 789 2 | 1737.8 | 1791.5 | 3.9305 | .001 700 3 | 1702.9 | 1762.4 | 3.8722 |
| 400 | .006 004 | 2430.1 | 2580.2 | 5.1418 | .002 790 | 2067.4 | 2151.1 | 4.4728 | .002 100 | 1914.1 | 1987.6 | 4.2126 |
| 425 | .007 881 | 2609.2 | 2806.3 | 5.4723 | .005 303 | 2455.1 | 2614.2 | 5.1504 | .003 428 | 2253.4 | 2373.4 | 4.7747 |
| 450 | .009 162 | 2720.7 | 2949.7 | 5.6744 | .006 735 | 2619.3 | 2821.4 | 5.4424 | .004 961 | 2498.7 | 2672.4 | 5.1962 |
| 500 | .011 123 | 2884.3 | 3162.4 | 5.9592 | .008 678 | 2820.7 | 3081.1 | 5.7905 | .006 927 | 2751.9 | 2994.4 | 5.6282 |
| 550 | .012 724 | 3017.5 | 3335.6 | 6.1765 | .010 168 | 2970.3 | 3275.4 | 6.0342 | .008 345 | 2921.0 | 3213.0 | 5.9026 |
| 600 | .014 137 | 3137.9 | 3491.4 | 6.3602 | .011 446 | 3100.5 | 3443.9 | 6.2331 | .009 527 | 3062.0 | 3395.5 | 6.1179 |
| 650 | .015 433 | 3251.6 | 3637.4 | 6.5229 | .012 596 | 3221.0 | 3598.9 | 6.4058 | .010 575 | 3189.8 | 3559.9 | 6.3010 |
| 700 | .016 646 | 3361.3 | 3777.5 | 6.6707 | .013 661 | 3335.8 | 3745.6 | 6.5606 | .011 533 | 3309.8 | 3713.5 | 6.4631 |
| 800 | .018 912 | 3574.3 | 4047.1 | 6.9345 | .015 623 | 3555.5 | 4024.2 | 6.8332 | .013 278 | 3536.7 | 4001.5 | 6.7450 |
| 900 | .021 045 | 3783.0 | 4309.1 | 7.1680 | .017 448 | 3768.5 | 4291.9 | 7.0718 | .014 883 | 3754.0 | 4274.9 | 6.9886 |
| 1000 | .023 10 | 3990.9 | 4568.5 | 7.3802 | .019 196 | 3978.8 | 4554.7 | 7.2867 | .016 410 | 3966.7 | 4541.1 | 7.2064 |
| 1100 | .025 12 | 4200.2 | 4828.2 | 7.5765 | .020 903 | 4189.2 | 4816.3 | 7.4845 | .017 895 | 4178.3 | 4804.6 | 7.4057 |

**TABLE A.1.3 (*suite*)**

**Vapeur surchauffée**

| *T* | *v* | *u* | *h* | *s* | *v* | *u* | *h* | *s* | *v* | *u* | *h* | *s* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *P* = 25.0 MPa | | | | *P* = 30.0 MPa | | | | *P* = 35.0 MPa | | | |
| 1200 | .027 11 | 4412.0 | 5089.9 | 7.7605 | .022 589 | 4401.3 | 5079.0 | 7.6692 | .019 360 | 4390.7 | 5068.3 | 7.5910 |
| 1300 | .029 10 | 4626.9 | 5354.4 | 7.9342 | .024 266 | 4616.0 | 5344.0 | 7.8432 | .020 815 | 4605.1 | 5333.6 | 7.7653 |
| | *P* = 40.0 MPa | | | | *P* = 50.0 MPa | | | | *P* = 60.0 MPa | | | |
| 375 | .001 640 7 | 1677.1 | 1742.8 | 3.8290 | .001 559 4 | 1638.6 | 1716.6 | 3.7639 | .001 502 8 | 1609.4 | 1699.5 | 3.7141 |
| 400 | .001 907 7 | 1854.6 | 1930.9 | 4.1135 | .001 730 9 | 1788.1 | 1874.6 | 4.0031 | .001 633 5 | 1745.4 | 1843.4 | 3.9318 |
| 425 | .002 532 | 2096.9 | 2198.1 | 4.5029 | .002 007 | 1959.7 | 2060.0 | 4.2734 | .001 816 5 | 1892.7 | 2001.7 | 4.1626 |
| 450 | .003 693 | 2365.1 | 2512.8 | 4.9459 | .002 486 | 2159.6 | 2284.0 | 4.5884 | .002 085 | 2053.9 | 2179.0 | 4.4121 |
| 500 | .005 622 | 2678.4 | 2903.3 | 5.4700 | .003 892 | 2525.5 | 2720.1 | 5.1726 | .002 956 | 2390.6 | 2567.9 | 4.9321 |
| 550 | .006 984 | 2869.7 | 3149.1 | 5.7785 | .005 118 | 2763.6 | 3019.5 | 5.5485 | .003 956 | 2658.8 | 2896.2 | 5.3441 |
| 600 | .008 094 | 3022.6 | 3346.4 | 6.0114 | .006 112 | 2942.0 | 3247.6 | 5.8178 | .004 834 | 2861.1 | 3151.2 | 5.6452 |
| 650 | .009 063 | 3158.0 | 3520.6 | 6.2054 | .006 966 | 3093.5 | 3441.8 | 6.0342 | .005 595 | 3028.8 | 3364.5 | 5.8829 |
| 700 | .009 941 | 3283.6 | 3681.2 | 6.3750 | .007 727 | 3230.5 | 3616.8 | 6.2189 | .006 272 | 3177.2 | 3553.5 | 6.0824 |
| 800 | .011 523 | 3517.8 | 3978.7 | 6.6662 | .009 076 | 3479.8 | 3933.6 | 6.5290 | .007 459 | 3441.5 | 3889.1 | 6.4109 |
| 900 | .012 962 | 3739.4 | 4257.9 | 6.9150 | .010 283 | 3710.3 | 4224.4 | 6.7882 | .008 508 | 3681.0 | 4191.5 | 6.6805 |
| 1000 | .014 324 | 3954.6 | 4527.6 | 7.1356 | .011 411 | 3930.5 | 4501.1 | 7.0146 | .009 480 | 3906.4 | 4475.2 | 6.9127 |
| 1100 | .015 642 | 4167.4 | 4793.1 | 7.3364 | .012 496 | 4145.7 | 4770.5 | 7.2184 | .010 409 | 4124.1 | 4748.6 | 7.1195 |
| 1200 | .016 940 | 4380.1 | 5057.7 | 7.5224 | .013 561 | 4359.1 | 5037.2 | 7.4058 | .011 317 | 4338.2 | 5017.2 | 7.3083 |
| 1300 | .018 229 | 4594.3 | 5323.5 | 7.6969 | .014 616 | 4572.8 | 5303.6 | 7.5808 | .012 215 | 4551.4 | 5284.3 | 7.4837 |

**TABLE A.1.4**

**Liquide comprimé**

| $T$ | $v$ | $u$ | $h$ | $s$ | $v$ | $u$ | $h$ | $s$ | $v$ | $u$ | $h$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P$ = 5 MPa (263.99) | | | | $P$ = 10 MPa (311.06) | | | | $P$ = 15 MPa (342.24) | | | |
| Sat. | .001 285 9 | 1147.8 | 1154.2 | 2.9202 | .001 452 4 | 1393.0 | 1407.6 | 3.3596 | .001 658 1 | 1585.6 | 1610.5 | 3.6848 |
| 0 | .000 997 7 | .04 | 5.04 | .0001 | .000 995 2 | .09 | 10.04 | .0002 | .000 992 8 | .15 | 15.05 | .0004 |
| 20 | .000 999 5 | 83.65 | 88.65 | .2956 | .000 997 2 | 83.36 | 93.33 | .2945 | .000 995 0 | 83.06 | 97.99 | .2934 |
| 40 | .001 005 6 | 166.95 | 171.97 | .5705 | .001 003 4 | 166.35 | 176.38 | .5686 | .001 001 3 | 165.76 | 180.78 | .5666 |
| 60 | .001 014 9 | 250.23 | 255.30 | .8285 | .001 012 7 | 249.36 | 259.49 | .8258 | .001 010 5 | 248.51 | 263.67 | .8232 |
| 80 | .001 026 8 | 333.72 | 338.85 | 1.0720 | .001 024 5 | 332.59 | 342.83 | 1.0688 | .001 022 2 | 331.48 | 346.81 | 1.0656 |
| 100 | .001 041 0 | 417.52 | 422.72 | 1.3030 | .001 038 5 | 416.12 | 426.50 | 1.2992 | .001 036 1 | 414.74 | 430.28 | 1.2955 |
| 120 | .001 057 6 | 501.80 | 507.09 | 1.5233 | .001 054 9 | 500.08 | 510.64 | 1.5189 | .001 052 2 | 498.40 | 514.19 | 1.5145 |
| 140 | .001 076 8 | 586.76 | 592.15 | 1.7343 | .001 073 7 | 584.68 | 595.42 | 1.7292 | .001 070 7 | 582.66 | 598.72 | 1.7242 |
| 160 | .001 098 8 | 672.62 | 678.12 | 1.9375 | .001 095 3 | 670.13 | 681.08 | 1.9317 | .001 091 8 | 667.71 | 684.09 | 1.9260 |
| 180 | .001 124 0 | 759.63 | 765.25 | 2.1341 | .001 119 9 | 756.65 | 767.84 | 2.1275 | .001 115 9 | 753.76 | 770.50 | 2.1210 |
| 200 | .001 153 0 | 848.1 | 853.9 | 2.3255 | .001 148 0 | 844.5 | 856.0 | 2.3178 | .001 143 3 | 841.0 | 858.2 | 2.3104 |
| 220 | .001 186 6 | 938.4 | 944.4 | 2.5128 | .001 180 5 | 934.1 | 945.9 | 2.5039 | .001 174 8 | 929.9 | 947.5 | 2.4953 |
| 240 | .001 226 4 | 1031.4 | 1037.5 | 2.6979 | .001 218 7 | 1026.0 | 1038.1 | 2.6872 | .001 211 4 | 1020.8 | 1039.0 | 2.6771 |
| 260 | .001 274 9 | 1127.9 | 1134.3 | 2.8830 | .001 264 5 | 1121.1 | 1133.7 | 2.8699 | .001 255 0 | 1114.6 | 1133.4 | 2.8576 |
| 280 | | | | | .001 321 6 | 1220.9 | 1234.1 | 3.0548 | .001 308 4 | 1212.5 | 1232.1 | 3.0393 |
| 300 | | | | | .001 397 2 | 1328.4 | 1342.3 | 3.2469 | .001 377 0 | 1316.6 | 1337.3 | 3.2260 |
| 320 | | | | | | | | | .001 472 4 | 1431.1 | 1453.2 | 3.4247 |
| 340 | | | | | | | | | .001 631 1 | 1567.5 | 1591.9 | 3.6546 |

**TABLE A.1.4 *(suite)***

**Liquide comprimé**

| *T* | *v* | *u* | *h* | *s* | *v* | *u* | *h* | *s* | *v* | *u* | *h* | *s* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *P* = 20 MPa (365.81) | | | | *P* = 30 MPa | | | | *P* = 50 MPa | | | |
| Sat. | .002 036 | 1785.6 | 1826.3 | 4.0139 | | | | | | | | |
| 0 | .000 990 4 | .19 | 20.01 | .0004 | .000 985 6 | .25 | 29.82 | .0001 | .000 976 6 | .20 | 49.03 | −.0014 |
| 20 | .000 992 8 | 82.77 | 102.62 | .2923 | .000 988 6 | 82.17 | 111.84 | .2899 | .000 980 4 | 81.00 | 130.02 | .2848 |
| 40 | .000 999 2 | 165.17 | 185.16 | .5646 | .000 995 1 | 164.04 | 193.89 | .5607 | .000 987 2 | 161.86 | 211.21 | .5527 |
| 60 | .001 008 4 | 247.68 | 267.85 | .8206 | .001 004 2 | 246.06 | 276.19 | .8154 | .000 996 2 | 242.98 | 292.79 | .8052 |
| 80 | .001 019 9 | 330.40 | 350.80 | 1.0624 | .001 015 6 | 328.30 | 358.77 | 1.0561 | .001 007 3 | 324.34 | 374.70 | 1.0440 |
| 100 | .001 033 7 | 413.39 | 434.06 | 1.2917 | .001 029 0 | 410.78 | 441.66 | 1.2844 | .001 020 1 | 405.88 | 456.89 | 1.2703 |
| 120 | .001 049 6 | 496.76 | 517.76 | 1.5102 | .001 044 5 | 493.59 | 524.93 | 1.5018 | .001 034 8 | 487.65 | 539.39 | 1.4857 |
| 140 | .001 067 8 | 580.69 | 602.04 | 1.7193 | .001 062 1 | 576.88 | 608.75 | 1.7098 | .001 051 5 | 569.77 | 622.35 | 1.6915 |
| 160 | .001 088 5 | 665.35 | 687.12 | 1.9204 | .001 082 1 | 660.82 | 693.28 | 1.9096 | .001 070 3 | 652.41 | 705.92 | 1.8891 |
| 180 | .001 112 0 | 750.95 | 773.20 | 2.1147 | .001 104 7 | 745.59 | 778.73 | 2.1024 | .001 091 2 | 735.69 | 790.25 | 2.0794 |
| 200 | .001 138 8 | 837.7 | 860.5 | 2.3031 | .001 130 2 | 831.4 | 865.3 | 2.2893 | .001 114 6 | 819.7 | 875.5 | 2.2634 |
| 220 | .001 169 3 | 925.9 | 949.3 | 2.4870 | .001 159 0 | 918.3 | 953.1 | 2.4711 | .001 140 8 | 904.7 | 961.7 | 2.4419 |
| 240 | .001 204 6 | 1016.0 | 1040.0 | 2.6674 | .001 192 0 | 1006.9 | 1042.6 | 2.6490 | .001 170 2 | 990.7 | 1049.2 | 2.6158 |
| 260 | .001 246 2 | 1108.6 | 1133.5 | 2.8459 | .001 230 3 | 1097.4 | 1134.3 | 2.8243 | .001 203 4 | 1078.1 | 1138.2 | 2.7860 |
| 280 | .001 296 5 | 1204.7 | 1230.6 | 3.0248 | .001 275 5 | 1190.7 | 1229.0 | 2.9986 | .001 241 5 | 1167.2 | 1229.3 | 2.9537 |
| 300 | .001 359 6 | 1306.1 | 1333.3 | 3.2071 | .001 330 4 | 1287.9 | 1327.8 | 3.1741 | .001 286 0 | 1258.7 | 1323.0 | 3.1200 |
| 320 | .001 443 7 | 1415.7 | 1444.6 | 3.3979 | .001 399 7 | 1390.7 | 1432.7 | 3.3539 | .001 338 8 | 1353.3 | 1420.2 | 3.2868 |
| 340 | .001 568 4 | 1539.7 | 1571.0 | 3.6075 | .001 492 0 | 1501.7 | 1546.5 | 3.5426 | .001 403 2 | 1452.0 | 1522.1 | 3.4557 |
| 360 | .001 822 6 | 1702.8 | 1739.3 | 3.8772 | .001 626 5 | 1626.6 | 1675.4 | 3.7494 | .001 483 8 | 1556.0 | 1630.2 | 3.6291 |
| 380 | | | | | .001 869 1 | 1781.4 | 1837.5 | 4.0012 | .001 588 4 | 1667.2 | 1746.6 | 3.8101 |

**TABLE A.2**

**Variables thermodynamiques de l'ammoniac[a]**

**TABLE A.2.1**

**Ammoniac saturé**

| Temp. °C | Pres. abs. kPa $P$ | Volume massique $m^3/kg$ Liquide sat. $v_f$ | Évap. $v_{fg}$ | Vapeur sat. $v_g$ | Enthalpie kJ/kg Liquide sat. $h_f$ | Évap. $h_{fg}$ | Vapeur sat. $h_g$ | Entropie kJ/kg·K Liquide sat. $s_f$ | Évap. $s_{fg}$ | Vapeur sat. $s_g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −50 | 40.88 | 0.001 424 | 2.6239 | 2.6254 | −44.3 | 1416.7 | 1372.4 | −0.1942 | 6.3502 | 6.1561 |
| −48 | 45.96 | 0.001 429 | 2.3518 | 2 3533 | −35.5 | 1411.3 | 1375.8 | −0.1547 | 6.2696 | 6.1149 |
| −46 | 51.55 | 0.001 434 | 2.1126 | 2.1140 | −26.6 | 1405.8 | 1379.2 | −0.1156 | 6.1902 | 6.0746 |
| −44 | 57.69 | 0.001 439 | 1.9018 | 1.9032 | −17.8 | 1400.3 | 1382.5 | −0.0768 | 6.1120 | 6.0352 |
| −42 | 64.42 | 0.001 444 | 1.7155 | 1.7170 | −8.9 | 1394.7 | 1385.8 | −0.0382 | 6.0349 | 5.9967 |
| −40 | 71.77 | 0.001 449 | 1.5506 | 1.5521 | 0.0 | 1389.0 | 1389.0 | 0.0000 | 5.9589 | 5.9589 |
| −38 | 79.80 | 0.001 454 | 1.4043 | 1.4058 | 8.9 | 1383.3 | 1392.2 | 0.0380 | 5.8840 | 5.9220 |
| −36 | 88.54 | 0.001 460 | 1.2742 | 1.2757 | 17.8 | 1377.6 | 1395.4 | 0.0757 | 5.8101 | 5.8858 |
| −34 | 98.05 | 0.001 465 | 1.1582 | 1.1597 | 26.8 | 1371.8 | 1398.5 | 0.1132 | 5.7372 | 5.8504 |
| −32 | 108.37 | 0.001 470 | 1.0547 | 1.0562 | 35.7 | 1365.9 | 1401.6 | 0.1504 | 5.6652 | 5.8156 |
| −30 | 119.55 | 0.001 476 | 0.9621 | 0.9635 | 44.7 | 1360.0 | 1404.6 | 0.1873 | 5.5942 | 5.7815 |
| −28 | 131.64 | 0.001 481 | 0.8790 | 0.8805 | 53.6 | 1354.0 | 1407.6 | 0.2240 | 5.5241 | 5.7481 |
| −26 | 144.70 | 0.001 487 | 0.8044 | 0.8059 | 62.6 | 1347.9 | 1410.5 | 0.2605 | 5.4548 | 5.7153 |
| −24 | 158.78 | 0.001 492 | 0.7373 | 0.7388 | 71.6 | 1341.8 | 1413.4 | 0.2967 | 5.3864 | 5.6831 |
| −22 | 173.93 | 0.001 498 | 0.6768 | 0.6783 | 80.7 | 1335.6 | 1416.2 | 0.3327 | 5.3188 | 5.6515 |
| −20 | 190.22 | 0.001 504 | 0.6222 | 0.6237 | 89.7 | 1329.3 | 1419.0 | 0.3684 | 5.2520 | 5.6205 |
| −18 | 207.71 | 0.001 510 | 0.5728 | 0.5743 | 98.8 | 1322.9 | 1421.7 | 0.4040 | 5.1860 | 5.5900 |
| −16 | 226.45 | 0.001 515 | 0.5280 | 0.5296 | 107.8 | 1316.5 | 1424.4 | 0.4393 | 5.1207 | 5.5600 |
| −14 | 246.51 | 0.001 521 | 0.4874 | 0.4889 | 116.9 | 1310.0 | 1427.0 | 0.4744 | 5.0561 | 5.5305 |
| −12 | 267.95 | 0.001 528 | 0.4505 | 0.4520 | 126.0 | 1303.5 | 1429.5 | 0.5093 | 4.9922 | 5.5015 |

**TABLE A.2.1**

**Ammoniac saturé**

| Temp. °C | Pres. abs. kPa $P$ | Volume massique m³/kg Liquide sat. $v_f$ | Évap. $v_{fg}$ | Vapeur sat. $v_g$ | Enthalpie kJ/kg Liquide sat. $h_f$ | Évap. $h_{fg}$ | Vapeur sat. $h_g$ | Entropie kJ/kg·K Liquide sat. $s_f$ | Évap. $s_{fg}$ | Vapeur sat. $s_g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −10 | 290.85 | 0.001 534 | 0.4169 | 0.4185 | 135.2 | 1296.8 | 1432.0 | 0.5440 | 4.9290 | 5.4730 |
| −8 | 315.25 | 0.001 540 | 0.3863 | 0.3878 | 144.3 | 1290.1 | 1434.4 | 0.5785 | 4.8664 | 5.4449 |
| −6 | 341.25 | 0.001 546 | 0.3583 | 0.3599 | 153.5 | 1283.3 | 1436.8 | 0.6128 | 4.8045 | 5.4173 |
| −4 | 368.90 | 0.001 553 | 0.3328 | 0.3343 | 162.7 | 1276.4 | 1439.1 | 0.6469 | 4.7432 | 5.3901 |
| −2 | 398.27 | 0.001 559 | 0.3094 | 0.3109 | 171.9 | 1269.4 | 1441.3 | 0.6808 | 4.6825 | 5.3633 |
| 0 | 429.44 | 0.001 566 | 0.2879 | 0.2895 | 181.1 | 1262.4 | 1443.5 | 0.7145 | 4.6223 | 5.3369 |
| 2 | 462.49 | 0.001 573 | 0.2683 | 0.2698 | 190.4 | 1255.2 | 1445.6 | 0.7481 | 4.5627 | 5.3108 |
| 4 | 497.49 | 0.001 580 | 0.2502 | 0.2517 | 199.6 | 1248.0 | 1447.6 | 0.7815 | 4.5037 | 5.2852 |
| 6 | 534.51 | 0.001 587 | 0.2335 | 0.2351 | 208.9 | 1240.6 | 1449.6 | 0.8148 | 4.4451 | 5.2599 |
| 8 | 573.64 | 0.001 594 | 0.2182 | 0.2198 | 218.3 | 1233.2 | 1451.5 | 0.8479 | 4.3871 | 5.2350 |
| 10 | 614.95 | 0.001 601 | 0.2040 | 0.2056 | 227.6 | 1225.7 | 1453.3 | 0.8808 | 4.3295 | 5.2104 |
| 12 | 658.52 | 0.001 608 | 0.1910 | 0.1926 | 237.0 | 1218.1 | 1455.1 | 0.9136 | 4.2725 | 5.1861 |
| 14 | 704.44 | 0.001 616 | 0.1789 | 0.1805 | 246.4 | 1210.4 | 1456.8 | 0.9463 | 4.2159 | 5.1621 |
| 16 | 752.79 | 0.001 623 | 0.1677 | 0.1693 | 255.9 | 1202.6 | 1458.5 | 0.9788 | 4.1597 | 5.1385 |
| 18 | 803.66 | 0.001 631 | 0.1574 | 0.1590 | 265.4 | 1194.7 | 1460.0 | 1.0112 | 4.1039 | 5.1151 |
| 20 | 857.12 | 0.001 639 | 0.1477 | 0.1494 | 274.9 | 1186.7 | 1461.5 | 1.0434 | 4.0486 | 5.0920 |
| 22 | 913.27 | 0.001 647 | 0.1388 | 0.1405 | 284.4 | 1178.5 | 1462.9 | 1.0755 | 3.9937 | 5.0692 |
| 24 | 972.19 | 0.001 655 | 0.1305 | 0.1322 | 294.0 | 1170.3 | 1464.3 | 1.1075 | 3.9392 | 5.0467 |
| 26 | 1033.97 | 0.001 663 | 0.1228 | 0.1245 | 303.6 | 1162.0 | 1465.6 | 1.1394 | 3.8850 | 5.0244 |
| 28 | 1098.71 | 0.001 671 | 0.1156 | 0.1173 | 313.2 | 1153.6 | 1466.8 | 1.1711 | 3.8312 | 5.0023 |
| 30 | 1166.49 | 0.001 680 | 0.1089 | 0.1106 | 322.9 | 1145.0 | 1467.9 | 1.2028 | 3.7777 | 4.9805 |
| 32 | 1237.41 | 0.001 689 | 0.1027 | 0.1044 | 332.6 | 1136.4 | 1469.0 | 1.2343 | 3.7246 | 4.9589 |
| 34 | 1311.55 | 0.001 698 | 0.0969 | 0.0986 | 342.3 | 1127.6 | 1469.9 | 1.2656 | 3.6718 | 4.9374 |
| 36 | 1389.03 | 0.001 707 | 0.0914 | 0.0931 | 352.1 | 1118.7 | 1470.8 | 1.2969 | 3.6192 | 4.9161 |
| 38 | 1469.92 | 0.001 716 | 0.0863 | 0.0880 | 361.9 | 1109.7 | 1471.5 | 1.3281 | 3.5669 | 4.8950 |
| 40 | 1554.33 | 0.001 726 | 0.0815 | 0.0833 | 371.7 | 1100.5 | 1472.2 | 1.3591 | 3.5148 | 4.8740 |
| 42 | 1642.35 | 0.001 735 | 0.0771 | 0.0788 | 381.6 | 1091.2 | 1472.8 | 1.3901 | 3.4630 | 4.8530 |
| 44 | 1734.09 | 0.001 745 | 0.0728 | 0.0746 | 391.5 | 1081.7 | 1473.2 | 1.4209 | 3.4112 | 4.8322 |
| 46 | 1829.65 | 0.001 756 | 0.0689 | 0.0707 | 401.5 | 1072.0 | 1473.5 | 1.4518 | 3.3595 | 4.8113 |
| 48 | 1929.13 | 0.001 766 | 0.0652 | 0.0669 | 411.5 | 1062.2 | 1473.7 | 1.4826 | 3.3079 | 4.7905 |
| 50 | 2032.62 | 0.001 777 | 0.0617 | 0.0635 | 421.7 | 1052.0 | 1473.7 | 1.5135 | 3.2561 | 4.7696 |

[a] Adaptation de: National Bureau of Standards Circular No. 142, *Tables of Thermodynamic Properties of Ammonia.*

**TABLE A.2.2**

**Ammoniac surchauffé**

| Pres. abs. kPa (Temp. de sat.) °C | | Température, °C | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | −20 | −10 | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 100 |
| 50 | *v* | 2.4474 | 2.5481 | 2.6482 | 2.7479 | 2.8473 | 2.9464 | 3.0453 | 3.1441 | 3.2427 | 3.3413 | 3.4397 | |
| | *h* | 1435.8 | 1457.0 | 1478.1 | 1499.2 | 1520.4 | 1541.7 | 1563.0 | 1584.5 | 1606.1 | 1627.8 | 1649.7 | |
| (−46.54) | *s* | 6.3256 | 6.4077 | 6.4865 | 6.5625 | 6.6360 | 6.7073 | 6.7766 | 6.8441 | 6.9099 | 6.9743 | 7.0372 | |
| 75 | *v* | 1.6233 | 1.6915 | 1.7591 | 1.8263 | 1.8932 | 1.9597 | 2.0261 | 2.0923 | 2.1584 | 2.2244 | 2.2903 | |
| | *h* | 1433.0 | 1454.7 | 1476.1 | 1497.5 | 1518.9 | 1540.3 | 1561.8 | 1583.4 | 1605.1 | 1626.9 | 1648.9 | |
| (−39.18) | *s* | 6.1190 | 6.2028 | 6.2828 | 6.3597 | 6.4339 | 6.5058 | 6.5756 | 6.6434 | 6.7096 | 6.7742 | 6.8373 | |
| 100 | *v* | 1.2110 | 1.2631 | 1.3145 | 1.3654 | 1.4160 | 1.4664 | 1.5165 | 1.5664 | 1.6163 | 1.6659 | 1.7155 | 1.8145 |
| | *h* | 1430.1 | 1452.2 | 1474.1 | 1495.7 | 1517.3 | 1538.9 | 1560.5 | 1582.2 | 1604.1 | 1626.0 | 1648.0 | 1692.6 |
| (−33.61) | *s* | 5.9695 | 6.0552 | 6.1366 | 6.2144 | 6.2894 | 6.3618 | 6.4321 | 6.5003 | 6.5668 | 6.6316 | 6.6950 | 6.8177 |
| 125 | *v* | 0.9635 | 1.0059 | 1.0476 | 1.0889 | 1.1297 | 1.1703 | 1.2107 | 1.2509 | 1.2909 | 1.3309 | 1.3707 | 1.4501 |
| | *h* | 1427.2 | 1449.8 | 1472.0 | 1493.9 | 1515.7 | 1537.5 | 1559.3 | 1581.1 | 1603.0 | 1625.0 | 1647.2 | 1691.8 |
| (−29.08) | *s* | 5.8512 | 5.9389 | 6.0217 | 6.1006 | 6.1763 | 6.2494 | 6.3201 | 6.3887 | 6.4555 | 6.5206 | 6.5842 | 6.7072 |
| 150 | *v* | 0.7984 | 0.8344 | 0.8697 | 0.9045 | 0.9388 | 0.9729 | 1.0068 | 1.0405 | 1.0740 | 1.1074 | 1.1408 | 1.2072 |
| | *h* | 1424.1 | 1447.3 | 1469.8 | 1492.1 | 1514.1 | 1536.1 | 1558.0 | 1580.0 | 1602.0 | 1624.1 | 1646.3 | 1691.1 |
| (−25.23) | *s* | 5.7526 | 5.8424 | 5.9266 | 6.0066 | 6.0831 | 6.1568 | 6.2280 | 6.2970 | 6.3641 | 6.4295 | 6.4933 | 6.6167 |

**TABLE A.2.2**

**Ammoniac surchauffé**

| Pres. abs. kPa (Temp. de sat.) °C | | Température, °C | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | −20 | −10 | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 100 |
| 200 | $v$ | | 0.6199 | 0.6471 | 0.6738 | 0.7001 | 0.7261 | 0.7519 | 0.7774 | 0.8029 | 0.8282 | 0.8533 | 0.9035 |
| | $h$ | | 1442.0 | 1465.5 | 1488.4 | 1510.9 | 1533.2 | 1555.5 | 1577.7 | 1599.9 | 1622.2 | 1644.6 | 1689.6 |
| (−18.86) | $s$ | | 5.6863 | 5.7737 | 5.8559 | 5.9342 | 6.0091 | 6.0813 | 6.1512 | 6.2189 | 6.2849 | 6.3491 | 6.4732 |
| 250 | $v$ | | 0.4910 | 0.5135 | 0.5354 | 0.5568 | 0.5780 | 0.5989 | 0.6196 | 0.6401 | 0.6605 | 0.6809 | 0.7212 |
| | $h$ | | 1436.6 | 1461.0 | 1484.5 | 1507.6 | 1530.3 | 1552.9 | 1575.4 | 1597.8 | 1620.3 | 1642.8 | 1688.2 |
| (−13.67) | $s$ | | 5.5609 | 5.6517 | 5.7365 | 5.8165 | 5.8928 | 5.9661 | 6.0368 | 6.1052 | 6.1717 | 6.2365 | 6.3613 |
| 300 | $v$ | | | 0.4243 | 0.4430 | 0.4613 | 0.4792 | 0.4968 | 0.5143 | 0.5316 | 0.5488 | 0.5658 | 0.5997 |
| | $h$ | | | 1456.3 | 1480.6 | 1504.2 | 1527.4 | 1550.3 | 1573.0 | 1595.7 | 1618.4 | 1641.1 | 1686.7 |
| (−9.23) | $s$ | | | 5.5493 | 5.6366 | 5.7186 | 5.7963 | 5.8707 | 5.9423 | 6.0114 | 6.0785 | 6.1437 | 6.2693 |
| 350 | $v$ | | | 0.3605 | 0.3770 | 0.3929 | 0.4086 | 0.4239 | 0.4391 | 0.4541 | 0.4689 | 0.4837 | 0.5129 |
| | $h$ | | | 1451.5 | 1476.5 | 1500.7 | 1524.4 | 1547.6 | 1570.7 | 1593.6 | 1616.5 | 1639.3 | 1685.2 |
| (−5.35) | $s$ | | | 5.4600 | 5.5502 | 5.6342 | 5.7135 | 5.7890 | 5.8615 | 5.9314 | 5.9990 | 6.0647 | 6.1910 |
| 400 | $v$ | | | 0.3125 | 0.3274 | 0.3417 | 0.3556 | 0.3692 | 0.3826 | 0.3959 | 0.4090 | 0.4220 | 0.4478 |
| | $h$ | | | 1446.5 | 1472.4 | 1497.2 | 1521.3 | 1544.9 | 1568.3 | 1591.5 | 1614.5 | 1637.6 | 1683.7 |
| (−1.89) | $s$ | | | 5.3803 | 5.4735 | 5.5597 | 5.6405 | 5.7173 | 5.7907 | 5.8613 | 5.9296 | 5.9957 | 6.1228 |
| 450 | $v$ | | | 0.2752 | 0.2887 | 0.3017 | 0.3143 | 0.3266 | 0.3387 | 0.3506 | 0.3624 | 0.3740 | 0.3971 |
| | $h$ | | | 1441.3 | 1468.1 | 1493.6 | 1518.2 | 1542.2 | 1565.9 | 1589.3 | 1612.6 | 1635.8 | 1682.2 |
| (1.26) | $s$ | | | 5.3078 | 5.4042 | 5.4926 | 5.5752 | 5.6532 | 5.7275 | 5.7989 | 5.8678 | 5.9345 | 6.0623 |

**TABLE A.2.2** ***(suite)***

**Ammoniac surchauffé**

| Pres. abs. kPa (Temp. de sat.) °C | | Température, °C 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $v$ | 0.2698 | 0.2813 | 0.2926 | 0.3036 | 0.3144 | 0.3251 | 0.3357 | 0.3565 | 0.3771 | 0.3975 | | |
| 500 | $h$ | 1489.9 | 1515.0 | 1539.5 | 1563.4 | 1587.1 | 1610.6 | 1634.0 | 1680.7 | 1727.5 | 1774.7 | | |
| (4.14) | $s$ | 5.4314 | 5.5157 | 5.5950 | 5.6704 | 5.7425 | 5.8120 | 5.8793 | 6.0079 | 6.1301 | 6.2472 | | |
| | $v$ | 0.2217 | 0.2317 | 0.2414 | 0.2508 | 0.2600 | 0.2691 | 0.2781 | 0.2957 | 0.3130 | 0.3302 | | |
| 600 | $h$ | 1482.4 | 1508.6 | 1533.8 | 1558.5 | 1582.7 | 1606.6 | 1630.4 | 1677.7 | 1724.9 | 1772.4 | | |
| (9.29) | $s$ | 5.3222 | 5.4102 | 5.4923 | 5.5697 | 5.6436 | 5.7144 | 5.7826 | 5.9129 | 6.0363 | 6.1541 | | |
| | $v$ | 0.1874 | 0.1963 | 0.2048 | 0.2131 | 0.2212 | 0.2291 | 0.2369 | 0.2522 | 0.2672 | 0.2821 | | |
| 700 | $h$ | 1474.5 | 1501.9 | 1528.1 | 1553.4 | 1578.2 | 1602.6 | 1626.8 | 1674.6 | 1722.4 | 1770.2 | | |
| (13.81) | $s$ | 5.2259 | 5.3179 | 5.4029 | 5.4826 | 5.5582 | 5.6303 | 5.6997 | 5.8316 | 5.9562 | 6.0749 | | |
| | $v$ | 0.1615 | 0.1696 | 0.1773 | 0.1848 | 0.1920 | 0.1991 | 0.2060 | 0.2196 | 0.2329 | 0.2459 | 0.2589 | |
| 800 | $h$ | 1466.3 | 1495.0 | 1522.2 | 1548.3 | 1573.7 | 1598.6 | 1623.1 | 1671.6 | 1719.8 | 1768.0 | 1816.4 | |
| (17.86) | $s$ | 5.1387 | 5.2351 | 5.3232 | 5.4053 | 5.4827 | 5.5562 | 5.6268 | 5.7603 | 5.8861 | 6.0057 | 6.1202 | |
| | $v$ | | 0.1488 | 0.1559 | 0.1627 | 0.1693 | 0.1757 | 0.1820 | 0.1942 | 0.2061 | 0.2178 | 0.2294 | |
| 900 | $h$ | | 1488.0 | 1516.2 | 1543.0 | 1569.1 | 1594.4 | 1619.4 | 1668.5 | 1717.1 | 1765.7 | 1814.4 | |
| (21.54) | $s$ | | 5.1593 | 5.2508 | 5.3354 | 5.4147 | 5.4897 | 5.5614 | 5.6968 | 5.8237 | 5.9442 | 6.0594 | |

**TABLE A.2.2** *(suite)*

**Ammoniac surchauffé**

| Pres. abs. kPa (Temp. de sat.) °C | | Température, °C 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $v$ | | 0.1321 | 0.1388 | 0.1450 | 0.1511 | 0.1570 | 0.1627 | 0.1739 | 0.1847 | 0.1954 | 0.2058 | 0.2162 |
| 1000 | $h$ | | 1480.6 | 1510.0 | 1537.7 | 1564.4 | 1590.3 | 1615.6 | 1665.4 | 1714.5 | 1763.4 | 1812.4 | 1861.7 |
| (24.91) | $s$ | | 5.0889 | 5.1840 | 5.2713 | 5.3525 | 5.4299 | 5.5021 | 5.6392 | 5.7674 | 5.8888 | 6.0047 | 6.1159 |
| | $v$ | | | 0.1129 | 0.1185 | 0.1238 | 0.1289 | 0.1338 | 0.1434 | 0.1526 | 0.1616 | 0.1705 | 0.1792 |
| 1200 | $h$ | | | 1497.1 | 1526.6 | 1554.7 | 1581.7 | 1608.0 | 1659.2 | 1709.2 | 1758.9 | 1808.5 | 1858.2 |
| (30.96) | $s$ | | | 5.0629 | 5.1560 | 5.2416 | 5.3215 | 5.3970 | 5.5379 | 5.6687 | 5.7919 | 5.9091 | 6.0214 |
| | $v$ | | | 0.0944 | 0.0995 | 0.1042 | 0.1088 | 0.1132 | 0.1216 | 0.1297 | 0.1376 | 0.1452 | 0.1528 |
| 1400 | $h$ | | | 1483.4 | 1515.1 | 1544.7 | 1573.0 | 1600.2 | 1652.8 | 1703.9 | 1754.3 | 1804.5 | 1854.7 |
| (36.28) | $s$ | | | 4.9534 | 5.0530 | 5.1434 | 5.2270 | 5.3053 | 5.4501 | 5.5836 | 5.7087 | 5.8273 | 5.9406 |
| | $v$ | | | | 0.0851 | 0.0895 | 0.0937 | 0.0977 | 0.1053 | 0.1125 | 0.1195 | 0.1263 | 0.1330 |
| 1600 | $h$ | | | | 1502.9 | 1534.4 | 1564.0 | 1592.3 | 1646.4 | 1698.5 | 1749.7 | 1800.5 | 1851.2 |
| (41.05) | $s$ | | | | 4.9584 | 5.0543 | 5.1419 | 5.2232 | 5.3722 | 5.5084 | 5.6355 | 5.7555 | 5.8699 |
| | $v$ | | | | 0.0739 | 0.0781 | 0.0820 | 0.0856 | 0.0926 | 0.0992 | 0.1055 | 0.1116 | 0.1177 |
| 1800 | $h$ | | | | 1490.0 | 1523.5 | 1554.6 | 1584.1 | 1639.8 | 1693.1 | 1745.1 | 1796.5 | 1847.7 |
| (45.39) | $s$ | | | | 4.8693 | 4.9715 | 5.0635 | 5.1482 | 5.3018 | 5.4409 | 5.5699 | 5.6914 | 5.8069 |
| | $v$ | | | | 0.0648 | 0.0688 | 0.0725 | 0.0760 | 0.0824 | 0.0885 | 0.0943 | 0.0999 | 0.1054 |
| 2000 | $h$ | | | | 1476.1 | 1512.0 | 1544.9 | 1575.6 | 1633.2 | 1687.6 | 1740.4 | 1792.4 | 1844.1 |
| (49.38) | $s$ | | | | 4.7834 | 4.8930 | 4.9902 | 5.0786 | 5.2371 | 5.3793 | 5.5104 | 5.6333 | 5.7499 |

**TABLE A-11**

**Saturated refrigerant-134a—Temperature table**

| | | Specific volume, $m^3/kg$ | | Internal energy, kJ/kg | | Enthalpy, kJ/kg | | | Entropy, kJ/(kg · K) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temp., $T$ °C | Press., $P_{sat}$ MPa | Sat. liquid, $v_f$ | Sat. vapor, $v_g$ | Sat. liquid, $u_f$ | Sat. vapor, $u_g$ | Sat. liquid, $h_f$ | Evap., $h_{fg}$ | Sat. vapor, $h_g$ | Sat. liquid, $s_f$ | Sat. vapor, $s_g$ |
| −40 | 0.05164 | 0.0007055 | 0.3569 | −0.04 | 204.45 | 0.00 | 222.88 | 222.88 | 0.0000 | 0.9560 |
| −36 | 0.06332 | 0.0007113 | 0.2947 | 4.68 | 206.73 | 4.73 | 220.67 | 225.40 | 0.0201 | 0.9506 |
| −32 | 0.07704 | 0.0007172 | 0.2451 | 9.47 | 209.01 | 9.52 | 218.37 | 227.90 | 0.0401 | 0.9456 |
| −28 | 0.09305 | 0.0007233 | 0.2052 | 14.31 | 211.29 | 14.37 | 216.01 | 230.38 | 0.0600 | 0.9411 |
| −26 | 0.10199 | 0.0007265 | 0.1882 | 16.75 | 212.43 | 16.82 | 214.80 | 231.62 | 0.0699 | 0.9390 |
| −24 | 0.11160 | 0.0007296 | 0.1728 | 19.21 | 213.57 | 19.29 | 213.57 | 232.85 | 0.0798 | 0.9370 |
| −22 | 0.12192 | 0.0007328 | 0.1590 | 21.68 | 214.70 | 21.77 | 212.32 | 234.08 | 0.0897 | 0.9351 |
| −20 | 0.13299 | 0.0007361 | 0.1464 | 24.17 | 215.84 | 24.26 | 211.05 | 235.31 | 0.0996 | 0.9332 |
| −18 | 0.14483 | 0.0007395 | 0.1350 | 26.67 | 216.97 | 26.77 | 209.76 | 236.53 | 0.1094 | 0.9315 |
| −16 | 0.15748 | 0.0007428 | 0.1247 | 29.18 | 218.10 | 29.30 | 208.45 | 237.74 | 0.1192 | 0.9298 |
| −12 | 0.18540 | 0.0007498 | 0.1068 | 34.25 | 220.36 | 34.39 | 205.77 | 240.15 | 0.1388 | 0.9267 |
| −8 | 0.21704 | 0.0007569 | 0.0919 | 39.38 | 222.60 | 39.54 | 203.00 | 242.54 | 0.1583 | 0.9239 |
| −4 | 0.25274 | 0.0007644 | 0.0794 | 44.56 | 224.84 | 44.75 | 200.15 | 244.90 | 0.1777 | 0.9213 |
| 0 | 0.29282 | 0.0007721 | 0.0689 | 49.79 | 227.06 | 50.02 | 197.21 | 247.23 | 0.1970 | 0.9190 |
| 4 | 0.33765 | 0.0007801 | 0.0600 | 55.08 | 229.27 | 55.35 | 194.19 | 249.53 | 0.2162 | 0.9169 |
| 8 | 0.38756 | 0.0007884 | 0.0525 | 60.43 | 231.46 | 60.73 | 191.07 | 251.80 | 0.2354 | 0.9150 |
| 12 | 0.44294 | 0.0007971 | 0.0460 | 65.83 | 233.63 | 66.18 | 187.85 | 254.03 | 0.2545 | 0.9132 |
| 16 | 0.50416 | 0.0008062 | 0.0405 | 71.29 | 235.78 | 71.69 | 184.52 | 256.22 | 0.2735 | 0.9116 |
| 20 | 0.57160 | 0.0008157 | 0.0358 | 76.80 | 237.91 | 77.26 | 181.09 | 258.35 | 0.2924 | 0.9102 |
| 24 | 0.64566 | 0.0008257 | 0.0317 | 82.37 | 240.01 | 82.90 | 177.55 | 260.45 | 0.3113 | 0.9089 |
| 26 | 0.68530 | 0.0008309 | 0.0298 | 85.18 | 241.05 | 85.75 | 175.73 | 261.48 | 0.3208 | 0.9082 |
| 28 | 0.72675 | 0.0008362 | 0.0281 | 88.00 | 242.08 | 88.61 | 173.89 | 262.50 | 0.3302 | 0.9076 |
| 30 | 0.77006 | 0.0008417 | 0.0265 | 90.84 | 243.10 | 91.49 | 172.00 | 263.50 | 0.3396 | 0.9070 |
| 32 | 0.81528 | 0.0008473 | 0.0250 | 93.70 | 244.12 | 94.39 | 170.09 | 264.48 | 0.3490 | 0.9064 |
| 34 | 0.86247 | 0.0008530 | 0.0236 | 96.58 | 245.12 | 97.31 | 168.14 | 265.45 | 0.3584 | 0.9058 |
| 36 | 0.91168 | 0.0008590 | 0.0223 | 99.47 | 246.11 | 100.25 | 166.15 | 266.40 | 0.3678 | 0.9053 |
| 38 | 0.96298 | 0.0008651 | 0.0210 | 102.38 | 247.09 | 103.21 | 164.12 | 267.33 | 0.3772 | 0.9047 |
| 40 | 1.0164 | 0.0008714 | 0.0199 | 105.30 | 248.06 | 106.19 | 162.05 | 268.24 | 0.3866 | 0.9041 |
| 42 | 1.0720 | 0.0008780 | 0.0188 | 108.25 | 249.02 | 109.19 | 159.94 | 269.14 | 0.3960 | 0.9035 |
| 44 | 1.1299 | 0.0008847 | 0.0177 | 111.22 | 249.96 | 112.22 | 157.79 | 270.01 | 0.4054 | 0.9030 |
| 48 | 1.2526 | 0.0008989 | 0.0159 | 117.22 | 251.79 | 118.35 | 153.33 | 271.68 | 0.4243 | 0.9017 |
| 52 | 1.3851 | 0.0009142 | 0.0142 | 123.31 | 253.55 | 124.58 | 148.66 | 273.24 | 0.4432 | 0.9004 |
| 56 | 1.5278 | 0.0009308 | 0.0127 | 129.51 | 255.23 | 130.93 | 143.75 | 274.68 | 0.4622 | 0.8990 |
| 60 | 1.6813 | 0.0009488 | 0.0114 | 135.82 | 256.81 | 137.42 | 138.57 | 275.99 | 0.4814 | 0.8973 |
| 70 | 2.1162 | 0.0010027 | 0.0086 | 152.22 | 260.15 | 154.34 | 124.08 | 278.43 | 0.5302 | 0.8918 |
| 80 | 2.6324 | 0.0010766 | 0.0064 | 169.88 | 262.14 | 172.71 | 106.41 | 279.12 | 0.5814 | 0.8827 |
| 90 | 3.2435 | 0.0011949 | 0.0046 | 189.82 | 261.34 | 193.69 | 82.63 | 276.32 | 0.6380 | 0.8655 |
| 100 | 3.9742 | 0.0015443 | 0.0027 | 218.60 | 248.49 | 224.74 | 34.40 | 259.13 | 0.7196 | 0.8117 |

*Source for Tables A-8 through A-10:* M. J. Moran and H. N. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, 2nd ed. (New York: John Wiley & Sons, 1992), pp. 710–15. Originally based on equations from D. P. Wilson and R. S. Basu, "Thermodynamic Properties of a New Stratospherically Safe Working Fluid—Refrigerant-134a," *ASHRAE Trans.* 94, Pt. 2 (1988), pp. 2095–118. Used with permission.

**TABLE A-12**

**Saturated refrigerant-134a—Pressure table**

| | | Specific volume, $m^3/kg$ | | Internal energy, kJ/kg | | Enthalpy, kJ/kg | | | Entropy, kJ/(kg · K) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Press., $P$ MPa | Temp., $T_{sat}$ °C | Sat. liquid, $v_f$ | Sat. vapor, $v_g$ | Sat. liquid, $u_f$ | Sat. vapor, $u_g$ | Sat. liquid, $h_f$ | Evap., $h_{fg}$ | Sat. vapor, $h_g$ | Sat. liquid, $s_f$ | Sat. vapor, $s_g$ |
| 0.06 | −37.07 | 0.0007097 | 0.3100 | 3.41 | 206.12 | 3.46 | 221.27 | 224.72 | 0.0147 | 0.9520 |
| 0.08 | −31.21 | 0.0007184 | 0.2366 | 10.41 | 209.46 | 10.47 | 217.92 | 228.39 | 0.0440 | 0.9447 |
| 0.10 | −26.43 | 0.0007258 | 0.1917 | 16.22 | 212.18 | 16.29 | 215.06 | 231.35 | 0.0678 | 0.9395 |
| 0.12 | −22.36 | 0.0007323 | 0.1614 | 21.23 | 214.50 | 21.32 | 212.54 | 233.86 | 0.0879 | 0.9354 |
| 0.14 | −18.80 | 0.0007381 | 0.1395 | 25.66 | 216.52 | 25.77 | 210.27 | 236.04 | 0.1055 | 0.9322 |
| 0.16 | −15.62 | 0.0007435 | 0.1229 | 29.66 | 218.32 | 29.78 | 208.18 | 237.97 | 0.1211 | 0.9295 |
| 0.18 | −12.73 | 0.0007485 | 0.1098 | 33.31 | 219.94 | 33.45 | 206.26 | 239.71 | 0.1352 | 0.9273 |
| 0.20 | −10.09 | 0.0007532 | 0.0993 | 36.69 | 221.43 | 36.84 | 204.46 | 241.30 | 0.1481 | 0.9253 |
| 0.24 | −5.37 | 0.0007618 | 0.0834 | 42.77 | 224.07 | 42.95 | 201.14 | 244.09 | 0.1710 | 0.9222 |
| 0.28 | −1.23 | 0.0007697 | 0.0719 | 48.18 | 226.38 | 48.39 | 198.13 | 246.52 | 0.1911 | 0.9197 |
| 0.32 | 2.48 | 0.0007770 | 0.0632 | 53.06 | 228.43 | 53.31 | 195.35 | 248.66 | 0.2089 | 0.9177 |
| 0.36 | 5.84 | 0.0007839 | 0.0564 | 57.54 | 230.28 | 57.82 | 192.76 | 250.58 | 0.2251 | 0.9160 |
| 0.4 | 8.93 | 0.0007904 | 0.0509 | 61.69 | 231.97 | 62.00 | 190.32 | 252.32 | 0.2399 | 0.9145 |
| 0.5 | 15.74 | 0.0008056 | 0.0409 | 70.93 | 235.64 | 71.33 | 184.74 | 256.07 | 0.2723 | 0.9117 |
| 0.6 | 21.58 | 0.0008196 | 0.0341 | 78.99 | 238.74 | 79.48 | 179.71 | 259.19 | 0.2999 | 0.9097 |
| 0.7 | 26.72 | 0.0008328 | 0.0292 | 86.19 | 241.42 | 86.78 | 175.07 | 261.85 | 0.3242 | 0.9080 |
| 0.8 | 31.33 | 0.0008454 | 0.0255 | 92.75 | 243.78 | 93.42 | 170.73 | 264.15 | 0.3459 | 0.9066 |
| 0.9 | 35.53 | 0.0008576 | 0.0226 | 98.79 | 245.88 | 99.56 | 166.62 | 266.18 | 0.3656 | 0.9054 |
| 1.0 | 39.39 | 0.0008695 | 0.0202 | 104.42 | 247.77 | 105.29 | 162.68 | 267.97 | 0.3838 | 0.9043 |
| 1.2 | 46.32 | 0.0008928 | 0.0166 | 114.69 | 251.03 | 115.76 | 155.23 | 270.99 | 0.4164 | 0.9023 |
| 1.4 | 52.43 | 0.0009159 | 0.0140 | 123.98 | 253.74 | 125.26 | 148.14 | 273.40 | 0.4453 | 0.9003 |
| 1.6 | 57.92 | 0.0009392 | 0.0121 | 132.52 | 256.00 | 134.02 | 141.31 | 275.33 | 0.4714 | 0.8982 |
| 1.8 | 62.91 | 0.0009631 | 0.0105 | 140.49 | 257.88 | 142.22 | 134.60 | 276.83 | 0.4954 | 0.8959 |
| 2.0 | 67.49 | 0.0009878 | 0.0093 | 148.02 | 259.41 | 149.99 | 127.95 | 277.94 | 0.5178 | 0.8934 |
| 2.5 | 77.59 | 0.0010562 | 0.0069 | 165.48 | 261.84 | 168.12 | 111.06 | 279.17 | 0.5687 | 0.8854 |
| 3.0 | 86.22 | 0.0011416 | 0.0053 | 181.88 | 262.16 | 185.30 | 92.71 | 278.01 | 0.6156 | 0.8735 |

**TABLE A-13**

**Superheated refrigerant-134a**

R-134a

| *T* °C | *v* m³/kg | *u* kJ/kg | *h* kJ/kg | *s* kJ/(kg · K) | *v* m³/kg | *u* kJ/kg | *h* kJ/kg | *s* kJ/(kg · K) | *v* m³/kg | *u* kJ/kg | *h* kJ/kg | *s* kJ/(kg · K) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **$P$ = 0.06 MPa ($T_{sat}$ = −37.07°C)** | | | | **$P$ = 0.10 MPa ($T_{sat}$ = −26.43°C)** | | | | **$P$ = 0.14 MPa ($T_{sat}$ = −18.80°C)** | | | |
| Sat. | 0.31003 | 206.12 | 224.72 | 0.9520 | 0.19170 | 212.18 | 231.35 | 0.9395 | 0.13945 | 216.52 | 236.04 | 0.9322 |
| −20 | 0.33536 | 217.86 | 237.98 | 1.0062 | 0.19770 | 216.77 | 236.54 | 0.9602 | | | | |
| −10 | 0.34992 | 224.97 | 245.96 | 1.0371 | 0.20686 | 224.01 | 244.70 | 0.9918 | 0.14549 | 223.03 | 243.40 | 0.9606 |
| 0 | 0.36433 | 232.24 | 254.10 | 1.0675 | 0.21587 | 231.41 | 252.99 | 1.0227 | 0.15219 | 230.55 | 251.86 | 0.9922 |
| 10 | 0.37861 | 239.69 | 262.41 | 1.0973 | 0.22473 | 238.96 | 261.43 | 1.0531 | 0.15875 | 238.21 | 260.43 | 1.0230 |
| 20 | 0.39279 | 247.32 | 270.89 | 1.1267 | 0.23349 | 246.67 | 270.02 | 1.0829 | 0.16520 | 246.01 | 269.13 | 1.0532 |
| 30 | 0.40688 | 255.12 | 279.53 | 1.1557 | 0.24216 | 254.54 | 278.76 | 1.1122 | 0.17155 | 253.96 | 277.97 | 1.0828 |
| 40 | 0.42091 | 263.10 | 288.35 | 1.1844 | 0.25076 | 262.58 | 287.66 | 1.1411 | 0.17783 | 262.06 | 286.96 | 1.1120 |
| 50 | 0.43487 | 271.25 | 297.34 | 1.2126 | 0.25930 | 270.79 | 296.72 | 1.1696 | 0.18404 | 270.32 | 296.09 | 1.1407 |
| 60 | 0.44879 | 279.58 | 306.51 | 1.2405 | 0.26779 | 279.16 | 305.94 | 1.1977 | 0.19020 | 278.74 | 305.37 | 1.1690 |
| 70 | 0.46266 | 288.08 | 315.84 | 1.2681 | 0.27623 | 287.70 | 315.32 | 1.2254 | 0.19633 | 287.32 | 314.80 | 1.1969 |
| 80 | 0.47650 | 296.75 | 325.34 | 1.2954 | 0.28464 | 296.40 | 324.87 | 1.2528 | 0.20241 | 296.06 | 324.39 | 1.2244 |
| 90 | 0.49031 | 305.58 | 335.00 | 1.3224 | 0.29302 | 305.27 | 334.57 | 1.2799 | 0.20846 | 304.95 | 334.14 | 1.2516 |
| 100 | | | | | | | | | 0.21449 | 314.01 | 344.04 | 1.2785 |
| | **$P$ = 0.18 MPa ($T_{sat}$ = −12.73°C)** | | | | **$P$ = 0.20 MPa ($T_{sat}$ = −10.09°C)** | | | | **$P$ = 0.24 MPa ($T_{sat}$ = −5.37°C)** | | | |
| Sat. | 0.10983 | 219.94 | 239.71 | 0.9273 | 0.09933 | 221.43 | 241.30 | 0.9253 | 0.08343 | 224.07 | 244.09 | 0.9222 |
| −10 | 0.11135 | 222.02 | 242.06 | 0.9362 | 0.09938 | 221.50 | 241.38 | 0.9256 | | | | |
| 0 | 0.11678 | 229.67 | 250.69 | 0.9684 | 0.10438 | 229.23 | 250.10 | 0.9582 | 0.08574 | 228.31 | 248.89 | 0.9399 |
| 10 | 0.12207 | 237.44 | 259.41 | 0.9998 | 0.10922 | 237.05 | 258.89 | 0.9898 | 0.08993 | 236.26 | 257.84 | 0.9721 |
| 20 | 0.12723 | 245.33 | 268.23 | 1.0304 | 0.11394 | 244.99 | 267.78 | 1.0206 | 0.09339 | 244.30 | 266.85 | 1.0034 |
| 30 | 0.13230 | 253.36 | 277.17 | 1.0604 | 0.11856 | 253.06 | 276.77 | 1.0508 | 0.09794 | 252.45 | 275.95 | 1.0339 |
| 40 | 0.13730 | 261.53 | 286.24 | 1.0898 | 0.12311 | 261.26 | 285.88 | 1.0804 | 0.10181 | 260.72 | 285.16 | 1.0637 |
| 50 | 0.14222 | 269.85 | 295.45 | 1.1187 | 0.12758 | 269.61 | 295.12 | 1.1094 | 0.10562 | 269.12 | 294.47 | 1.0930 |
| 60 | 0.14710 | 278.31 | 304.79 | 1.1472 | 0.13201 | 278.10 | 304.50 | 1.1380 | 0.10937 | 277.67 | 303.91 | 1.1218 |
| 70 | 0.15193 | 286.93 | 314.28 | 1.1753 | 0.13639 | 286.74 | 314.02 | 1.1661 | 0.11307 | 286.35 | 313.49 | 1.1501 |
| 80 | 0.15672 | 295.71 | 323.92 | 1.2030 | 0.14073 | 295.53 | 323.68 | 1.1939 | 0.11674 | 295.18 | 323.19 | 1.1780 |
| 90 | 0.16148 | 304.63 | 333.70 | 1.2303 | 0.14504 | 304.47 | 333.48 | 1.2212 | 0.12037 | 304.15 | 333.04 | 1.2055 |
| 100 | 0.16622 | 313.72 | 343.63 | 1.2573 | 0.14932 | 313.57 | 343.43 | 1.2483 | 0.12398 | 313.27 | 343.03 | 1.2326 |
| | **$P$ = 0.28 MPa ($T_{sat}$ = −1.23°C)** | | | | **$P$ = 0.32 MPa ($T_{sat}$ = 2.48°C)** | | | | **$P$ = 0.40 MPa ($T_{sat}$ = 8.93°C)** | | | |
| Sat. | 0.07193 | 226.38 | 246.52 | 0.9197 | 0.06322 | 228.43 | 248.66 | 0.9177 | 0.05089 | 231.97 | 252.32 | 0.9145 |
| 0 | 0.07240 | 227.37 | 247.64 | 0.9238 | | | | | | | | |
| 10 | 0.07613 | 235.44 | 256.76 | 0.9566 | 0.06576 | 234.61 | 255.65 | 0.9427 | 0.05119 | 232.87 | 253.35 | 0.9182 |
| 20 | 0.07972 | 243.59 | 265.91 | 0.9883 | 0.06901 | 242.87 | 264.95 | 0.9749 | 0.05397 | 241.37 | 262.96 | 0.9515 |
| 30 | 0.08320 | 251.83 | 275.12 | 1.0192 | 0.07214 | 251.19 | 274.28 | 1.0062 | 0.05662 | 249.89 | 272.54 | 0.9837 |
| 40 | 0.08660 | 260.17 | 284.42 | 1.0494 | 0.07518 | 259.61 | 283.67 | 1.0367 | 0.05917 | 258.47 | 282.14 | 1.0148 |
| 50 | 008992 | 268.64 | 293.81 | 1.0789 | 0.07815 | 268.14 | 293.15 | 1.0665 | 0.06164 | 267.13 | 291.79 | 1.0452 |
| 60 | 0.09319 | 277.23 | 303.32 | 1.1079 | 0.08106 | 276.79 | 302.72 | 1.0957 | 0.06405 | 275.89 | 301.51 | 1.0748 |
| 70 | 0.09641 | 285.96 | 312.95 | 1.1364 | 0.08392 | 285.56 | 312.41 | 1.1243 | 0.06641 | 284.75 | 311.32 | 1.1038 |
| 80 | 0.09960 | 294.82 | 322.71 | 1.1644 | 0.08674 | 294.46 | 322.22 | 1.1525 | 0.06873 | 293.73 | 321.23 | 1.1322 |
| 90 | 0.10275 | 303.83 | 332.60 | 1.1920 | 0.08953 | 303.50 | 332.15 | 1.1802 | 0.07102 | 302.84 | 331.25 | 1.1602 |
| 100 | 0.10587 | 312.98 | 342.62 | 1.2193 | 0.09229 | 312.68 | 342.21 | 1.1076 | 0.07327 | 312.07 | 341.38 | 1.1878 |
| 110 | 0.10897 | 322.27 | 352.78 | 1.2461 | 0.09503 | 322.00 | 352.40 | 1.2345 | 0.07550 | 321.44 | 351.64 | 1.2149 |
| 120 | 0.11205 | 331.71 | 363.08 | 1.2727 | 0.09774 | 331.45 | 362.73 | 1.2611 | 0.07771 | 330.94 | 362.03 | 1.2417 |
| 130 | | | | | | | | | 0.07991 | 340.58 | 372.54 | 1.2681 |
| 140 | | | | | | | | | 0.08208 | 350.35 | 383.18 | 1.2941 |

**TABLE A-13**

**Superheated refrigerant-134a** (*Concluded*)

| *T* °C | *v* m³/kg | *u* kJ/kg | *h* kJ/kg | *s* kJ/(kg · K) | *v* m³/kg | *u* kJ/kg | *h* kJ/kg | *s* kJ/(kg · K) | *v* m³/kg | *u* kJ/kg | *h* kJ/kg | *s* kJ/(kg · K) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **$P$ = 0.50 MPa ($T_{sat}$ = 15.74°C)** | | | | **$P$ = 0.60 MPa ($T_{sat}$ = 21.58°C)** | | | | **$P$ = 0.70 MPa ($T_{sat}$ = 26.72°C)** | | | |
| Sat. | 0.04086 | 253.64 | 256.07 | 0.9117 | 0.03408 | 238.74 | 259.19 | 0.9097 | 0.02918 | 241.42 | 261.85 | 0.9080 |
| 20 | 0.04188 | 239.40 | 260.34 | 0.9264 | | | | | | | | |
| 30 | 0.04416 | 248.20 | 270.28 | 0.9597 | 0.03581 | 246.41 | 267.89 | 0.9388 | 0.02979 | 244.51 | 265.37 | 0.9197 |
| 40 | 0.04633 | 256.99 | 280.16 | 0.9918 | 0.03774 | 255.45 | 278.09 | 0.9719 | 0.03157 | 253.83 | 275.93 | 0.9539 |
| 50 | 0.04842 | 265.83 | 290.04 | 1.0229 | 0.03958 | 264.48 | 288.23 | 1.0037 | 0.03324 | 263.08 | 286.35 | 0.9867 |
| 60 | 0.05043 | 274.73 | 299.95 | 1.0531 | 0.04134 | 273.54 | 298.35 | 1.0346 | 0.03482 | 272.31 | 296.69 | 1.0182 |
| 70 | 0.05240 | 283.72 | 309.92 | 1.0825 | 0.04304 | 282.66 | 308.48 | 1.0645 | 0.03634 | 281.57 | 307.01 | 1.0487 |
| 80 | 0.05432 | 292.80 | 319.96 | 1.1114 | 0.04469 | 291.86 | 318.67 | 1.0938 | 0.03781 | 290.88 | 317.35 | 1.0784 |
| 90 | 0.05620 | 302.00 | 330.10 | 1.1397 | 0.04631 | 301.14 | 328.93 | 1.1225 | 0.03924 | 300.27 | 327.74 | 1.1074 |
| 100 | 0.05805 | 311.31 | 340.33 | 1.1675 | 0.04790 | 310.53 | 339.27 | 1.1505 | 0.04064 | 309.74 | 338.19 | 1.1358 |
| 110 | 0.05988 | 320.74 | 350.68 | 1.1949 | 0.04946 | 320.03 | 349.70 | 1.1781 | 0.04201 | 319.31 | 348.71 | 1.1637 |
| 120 | 0.06168 | 330.30 | 361.14 | 1.2218 | 0.05099 | 329.64 | 360.24 | 1.2053 | 0.04335 | 328.98 | 359.33 | 1.1910 |
| 130 | 0.06347 | 339.98 | 371.72 | 1.2484 | 0.05251 | 339.38 | 370.88 | 1.2320 | 0.04468 | 338.76 | 370.04 | 1.2179 |
| 140 | 0.06524 | 349.79 | 382.42 | 1.2746 | 0.05402 | 349.23 | 381.64 | 1.2584 | 0.04599 | 348.66 | 380.86 | 1.2444 |
| 150 | | | | | 0.05550 | 359.21 | 392.52 | 1.2844 | 0.04729 | 358.68 | 391.79 | 1.2706 |
| 160 | | | | | 0.05698 | 369.32 | 403.51 | 1.3100 | 0.04857 | 368.82 | 402.82 | 1.2963 |
| | **$P$ = 0.80 MPa ($T_{sat}$ = 31.33°C)** | | | | **$P$ = 0.90 MPa ($T_{sat}$ = 35.53°C)** | | | | **$P$ = 1.00 MPa ($T_{sat}$ = 39.39°C)** | | | |
| Sat. | 0.02547 | 243.78 | 264.15 | 0.9066 | 0.02255 | 245.88 | 266.18 | 0.9054 | 0.02020 | 247.77 | 267.97 | 0.9043 |
| 40 | 0.02691 | 252.13 | 273.66 | 0.9374 | 0.02325 | 250.32 | 271.25 | 0.9217 | 0.02029 | 248.39 | 268.68 | 0.9066 |
| 50 | 0.02846 | 261.62 | 284.39 | 0.9711 | 0.02472 | 260.09 | 282.34 | 0.9566 | 0.02171 | 258.48 | 280.19 | 0.9428 |
| 60 | 0.02992 | 271.04 | 294.98 | 1.0034 | 0.02609 | 269.72 | 293.21 | 0.9897 | 0.02301 | 268.35 | 291.36 | 0.9768 |
| 70 | 0.03131 | 280.45 | 305.50 | 1.0345 | 0.02738 | 279.30 | 303.94 | 1.0214 | 0.02423 | 278.11 | 302.34 | 1.0093 |
| 80 | 0.03264 | 289.89 | 316.00 | 1.0647 | 0.02861 | 288.87 | 314.62 | 1.0521 | 0.02538 | 287.82 | 313.20 | 1.0405 |
| 90 | 0.03393 | 299.37 | 326.52 | 1.0940 | 0.02980 | 298.46 | 325.28 | 1.0819 | 0.02649 | 297.53 | 324.01 | 1.0707 |
| 100 | 0.03519 | 308.93 | 337.08 | 1.1227 | 0.03095 | 308.11 | 335.96 | 1.1109 | 0.02755 | 307.27 | 334.82 | 1.1000 |
| 110 | 0.03642 | 318.57 | 347.71 | 1.1508 | 0.03207 | 317.82 | 346.68 | 1.1392 | 0.02858 | 317.06 | 345.65 | 1.1286 |
| 120 | 0.03762 | 328.31 | 358.40 | 1.1784 | 0.03316 | 327.62 | 357.47 | 1.1670 | 0.02959 | 326.93 | 356.52 | 1.1567 |
| 130 | 0.03881 | 338.14 | 369.19 | 1.2055 | 0.03423 | 337.52 | 368.33 | 1.1943 | 0.03058 | 336.88 | 367.46 | 1.1841 |
| 140 | 0.03997 | 348.09 | 380.07 | 1.2321 | 0.03529 | 347.51 | 379.27 | 1.2211 | 0.03154 | 346.92 | 378.46 | 1.2111 |
| 150 | 0.04113 | 358.15 | 391.05 | 1.2584 | 0.03633 | 357.61 | 390.31 | 1.2475 | 0.03250 | 357.06 | 389.56 | 1.2376 |
| 160 | 0.04227 | 368.32 | 402.14 | 1.2843 | 0.03736 | 367.82 | 401.44 | 1.2735 | 0.03344 | 367.31 | 400.74 | 1.2638 |
| 170 | 0.04340 | 378.61 | 413.33 | 1.3098 | 0.03838 | 378.14 | 412.68 | 1.2992 | 0.03436 | 377.66 | 412.02 | 1.2895 |
| 180 | 0.04452 | 389.02 | 424.63 | 1.3351 | 0.03939 | 388.57 | 424.02 | 1.3245 | 0.03528 | 388.12 | 423.40 | 1.3149 |
| | **$P$ = 1.20 MPa ($T_{sat}$ = 46.32°C)** | | | | **$P$ = 1.40 MPa ($T_{sat}$ = 52.43°C)** | | | | **$P$ = 1.60 MPa ($T_{sat}$ = 57.92°C)** | | | |
| Sat. | 0.01663 | 251.03 | 270.99 | 0.9023 | 0.01405 | 253.74 | 273.40 | 0.9003 | 0.01208 | 256.00 | 275.33 | 0.8982 |
| 50 | 0.01712 | 254.98 | 275.52 | 0.9164 | | | | | | | | |
| 60 | 0.01835 | 265.42 | 287.44 | 0.9527 | 0.01495 | 262.17 | 283.10 | 0.9297 | 0.01233 | 258.48 | 278.20 | 0.9069 |
| 70 | 0.01947 | 275.59 | 298.96 | 0.9868 | 0.01603 | 272.87 | 295.31 | 0.9658 | 0.01340 | 269.89 | 291.33 | 0.9457 |
| 80 | 0.02051 | 285.62 | 310.24 | 1.0192 | 0.01701 | 283.29 | 307.10 | 0.9997 | 0.01435 | 280.78 | 303.74 | 0.9813 |
| 90 | 0.02150 | 295.59 | 321.39 | 1.0503 | 0.01792 | 293.55 | 318.63 | 1.0319 | 0.01521 | 291.39 | 315.72 | 1.0148 |
| 100 | 0.02244 | 305.54 | 332.47 | 1.0804 | 0.01878 | 303.73 | 330.02 | 1.0628 | 0.01601 | 301.84 | 327.46 | 1.0467 |
| 110 | 0.02335 | 315.50 | 343.52 | 1.1096 | 0.01960 | 313.88 | 341.32 | 1.0927 | 0.01677 | 312.20 | 339.04 | 1.0773 |
| 120 | 0.02423 | 325.51 | 354.58 | 1.1381 | 0.02039 | 324.05 | 352.59 | 1.1218 | 0.01750 | 322.53 | 350.53 | 1.1069 |
| 130 | 0.02508 | 335.58 | 365.68 | 1.1660 | 0.02115 | 334.25 | 363.86 | 1.1501 | 0.01820 | 332.87 | 361.99 | 1.1357 |
| 140 | 0.02592 | 345.73 | 376.83 | 1.1933 | 0.02189 | 344.50 | 375.15 | 1.1777 | 0.01887 | 343.24 | 373.44 | 1.1638 |
| 150 | 0.02674 | 355.95 | 388.04 | 1.2201 | 0.02262 | 354.82 | 386.49 | 1.2048 | 0.01953 | 353.66 | 384.91 | 1.1912 |
| 160 | 0.02754 | 366.27 | 399.33 | 1.2465 | 0.02333 | 365.22 | 397.89 | 1.2315 | 0.02017 | 364.15 | 396.43 | 1.2181 |
| 170 | 0.02834 | 376.69 | 410.70 | 1.2724 | 0.02403 | 375.71 | 409.36 | 1.2576 | 0.02080 | 374.71 | 407.99 | 1.2445 |
| 180 | 0.02912 | 387.21 | 422.16 | 1.2980 | 0.02472 | 386.29 | 420.90 | 1.2834 | 0.02142 | 385.35 | 419.62 | 1.2704 |
| 190 | | | | | 0.02541 | 396.96 | 432.53 | 1.3088 | 0.02203 | 396.08 | 431.33 | 1.2960 |
| 200 | | | | | 0.02608 | 407.73 | 444.24 | 1.3338 | 0.02263 | 406.90 | 443.11 | 1.3212 |

**TABLE A.6**

**Constantes critiques**[a]

| Substance | Formule | Masse molaire | Temp. K | Pression MPa | Volume $m^3/kmol$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Ammoniac | $NH_3$ | 17.03 | 405.5 | 11.28 | .0724 |
| Argon | Ar | 39.948 | 151 | 4.86 | .0749 |
| Azote | $N_2$ | 28.013 | 126.2 | 3.39 | .0899 |
| Brome | $Br_2$ | 159.808 | 584 | 10.34 | .1355 |
| Chlore | $Cl_2$ | 70.906 | 417 | 7.71 | .1242 |
| Deutérium (normal) | $D_2$ | 4.00 | 38.4 | 1.66 | — |
| Dioxyde de carbone | $CO_2$ | 44.01 | 304.2 | 7.39 | .0943 |
| Dioxyde de soufre | $SO_2$ | 64.063 | 430.7 | 7.88 | .1217 |
| Eau | $H_2O$ | 18.015 | 647.3 | 22.09 | .0568 |
| Hélium | He | 4.003 | 5.3 | 0.23 | .0578 |
| Hélium 3 | He | 3.00 | 3.3 | 0.12 | — |
| Hydrogène (normal) | $H_2$ | 2.016 | 33.3 | 1.30 | .0649 |
| Krypton | Kr | 83.80 | 209.4 | 5.50 | .0924 |
| Monoxyde de carbone | CO | 28.011 | 133 | 3.50 | .0930 |
| Néon | Ne | 20.183 | 44.5 | 2.73 | .0417 |
| Oxyde nitreux | $N_2O$ | 44.013 | 309.7 | 7.27 | .0961 |
| Oxygène | $O_2$ | 31.999 | 154.8 | 5.08 | .0780 |
| Xénon | Xe | 131.30 | 289.8 | 5.88 | .1186 |
| Alcool éthylique | $C_2H_5OH$ | 46.07 | 516 | 6.38 | .1673 |
| Alcool méthylique | $CH_3OH$ | 32.042 | 513.2 | 7.95 | .1180 |
| Benzène | $C_6H_6$ | 78.115 | 562 | 4.92 | .2603 |
| *n*-Butane | $C_4H_{10}$ | 58.124 | 425.2 | 3.80 | .2547 |
| Chloroforme | $CHCl_3$ | 119.38 | 536.6 | 5.47 | .2403 |
| Chlorure de méthyle | $CH_3Cl$ | 50.488 | 416.3 | 6.68 | .1430 |
| Dichlorodifluorométhane | $CCl_2F_2$ | 120.91 | 384.7 | 4.01 | .2179 |
| Dichlorofluorométhane | $CHCl_2F$ | 102.92 | 451.7 | 5.17 | .1973 |
| Éthane | $C_2H_6$ | 30.070 | 305.5 | 4.88 | .1480 |
| Éthylène | $C_2H_4$ | 28.054 | 282.4 | 5.12 | .1242 |
| *n*-Hexane | $C_6H_{14}$ | 86.178 | 507.9 | 3.03 | .3677 |
| Méthane | $CH_4$ | 16.043 | 191.1 | 4.64 | .0993 |
| Propane | $C_3H_8$ | 44.097 | 370 | 4.26 | .1998 |
| Propène | $C_3H_6$ | 42.081 | 365 | 4.62 | .1810 |
| Propyne | $C_3H_4$ | 40.065 | 401 | 5.35 | — |
| Tétrachlorure de carbone | $CCl_4$ | 153.82 | 556.4 | 4.56 | .2759 |
| Trichlorofluorométhane | $CCl_3F$ | 137.37 | 471.2 | 4.38 | .2478 |

[a] K. A. Kobe et R. E. Lynn, Jr., *Chem. Rev.*, 52: 117-236 (1953).

**TABLE A.7**

**Propriétés de différents solides et liquides**[a]

| Solide | $C_p$, kJ/kg·K | $\rho$, kg/m$^3$ | Liquide | $C_p$, kJ/kg·K | $\rho$, kg/m$^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Aluminium | 0.900 | 2700 | Ammoniaque | 4.800 | 602 |
| Argent | 0.235 | 10 470 | Eau | 4.184 | 997 |
| Bois (la plupart) | 1.760 | 350-700 | Éthanol | 2.456 | 783 |
| Caoutchouc (mou) | 1.840 | 1100 | Fréon-12 | 0.977 | 1310 |
| Cuivre | 0.386 | 8900 | Huile (légère) | 1.800 | 910 |
| Étain | 0.217 | 5730 | Mercure | 0.139 | 13 560 |
| Fer | 0.450 | 7840 | Méthanol | 2.550 | 787 |
| Granite | 1.017 | 2700 | | | |
| Graphite | 0.711 | 2500 | | | |
| Plomb | 0.128 | 11 310 | | | |

[a] Valeurs à 25 °C.

**TABLE A.8**

**Propriétés de différents gaz parfaits**[a]

| Gaz | Formule chimique | Masse molaire | $R \frac{kJ}{kg \cdot K}$ | $C_{po} \frac{kJ}{kg \cdot K}$ | $C_{vo} \frac{kJ}{kg \cdot K}$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Air | — | 28.97 | 0.287 00 | 1.0035 | 0.7165 | 1.400 |
| Argon | Ar | 39.948 | 0.208 13 | 0.5203 | 0.3122 | 1.667 |
| Azote | $N_2$ | 28.013 | 0.296 80 | 1.0416 | 0.7448 | 1.400 |
| Butane | $C_4H_{10}$ | 58.124 | 0.143 04 | 1.7164 | 1.5734 | 1.091 |
| Dioxyde de carbone | $CO_2$ | 44.01 | 0.188 92 | 0.8418 | 0.6529 | 1.289 |
| Éthane | $C_2H_6$ | 30.07 | 0.276 50 | 1.7662 | 1.4897 | 1.186 |
| Éthylène | $C_2H_4$ | 28.054 | 0.296 37 | 1.5482 | 1.2518 | 1.237 |
| Hélium | He | 4.003 | 2.077 03 | 5.1926 | 3.1156 | 1.667 |
| Hydrogène | $H_2$ | 2.016 | 4.124 18 | 14.2091 | 10.0849 | 1.409 |
| Méthane | $CH_4$ | 16.04 | 0.518 35 | 2.2537 | 1.7354 | 1.299 |
| Monoxyde de carbone | CO | 28.01 | 0.296 83 | 1.0413 | 0.7445 | 1.400 |
| Néon | Ne | 20.183 | 0.411 95 | 1.0299 | 0.6179 | 1.667 |
| Octane | $C_8H_{18}$ | 114.23 | 0.072 79 | 1.7113 | 1.6385 | 1.044 |
| Oxygène | $O_2$ | 31.999 | 0.259 83 | 0.9216 | 0.6618 | 1.393 |
| Propane | $C_3H_8$ | 44.097 | 0.188 55 | 1.6794 | 1.4909 | 1.126 |
| Vapeur d'eau | $H_2O$ | 18.015 | 0.461 52 | 1.8723 | 1.4108 | 1.327 |

[a] ($C_{po}$, $C_{vo}$ et $k$ sont à 300 K.)


01006288$02